经国家教委中小学教材
审定委员会审查试用

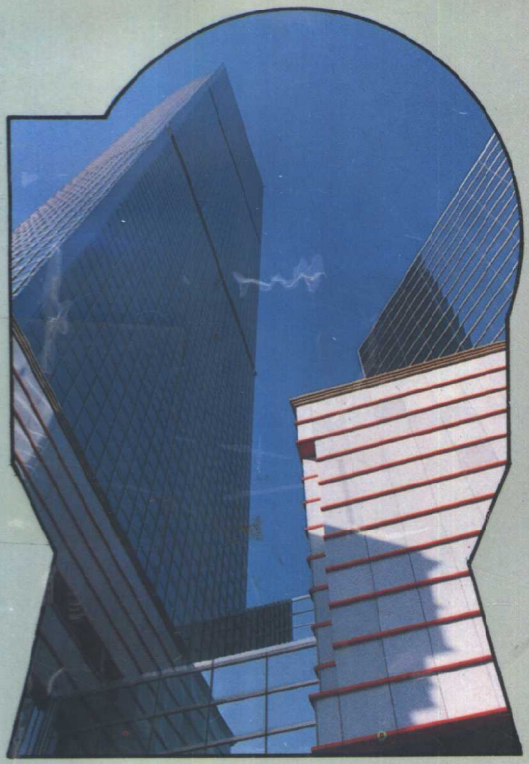
九年义务教育三年制初级中学教科书

几何

JI HE

第二册

人民教育出版社中学数学室 编著



人民教育出版社

九年义务教育三年制初级中学教科书

几　何

第二册

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

(京)新登字113号

九年义务教育三年制初级中学教科书

几　何

第二册

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人民教育出版社出版

北京出版社重印

北京市新华书店发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 8.75　字数 141 000

1993年10月第1版　1998年6月第5次印刷

印数　1—146 200

ISBN7—107—01925—2

G·3603(课)定价4.90元

如发现印装质量问题影响阅读请与北京出版社联系

电话:62012334

顾　　问：丁石孙　丁尔升　梅向明　张奎恩
　　张孝达
主　　编：吕学礼　饶汉昌　蔡上鹤
副 主 编：李慧君
编 写 者：李慧君　许缦阁　康合太
责任编辑：许缦阁

说　明

一、这套九年义务教育三年制初级中学教科书《几何》第一至第三册，是根据国家教委颁发的《九年义务教育全日制小学、初级中学课程计划(试行)》、《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用)》编写的.

二、本书从1991年秋季起，在全国二十几个省、自治区、直辖市的数十万学生中进行了试验，并于1993年经国家教委中小学教材审定委员会审查通过.

三、本书是几何第二册，内容包括：三角形，四边形，相似形，供六三制初中二年级使用，上学期每周2课时，下学期每周3课时.

四、本书在体例上有下列特点：

1. 每章都有一段配有插图的引言，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料.

2. 在课文中适当穿插了“想一想”、“读一读”、“做一做”等栏目. 其中“想一想”是供学生思考的一些问题，“读一读”是供学生阅读的一些短文，“做一做”是供学生课外动手操作的一些实例. 这些栏目是为扩大学生知识面、增加趣味性和实践性而设计的，这些都不作为教学要求，只供学生课外参考.

3. 每章后面都安排有“小结与复习”，其中的“学习要

求”是对学生学完全章后的要求。

4. 每章最后都配有一套“自我测验题”，供学生自己检查学完这一章后，是否达到本章的基本要求.

5. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类. 练习供课内用；习题供课内或课外作业用；复习题供复习每章时选用. 其中习题、复习题的题目分为 *A*、*B* 两组，*A* 组属于基本要求范围，*B* 组带有一定的灵活性，仅供学有余力的学生选用. 每组习题的第1题，都反映了这一部分知识的基本要求，可作为预习用，也可作为课后复习用，不要求做出书面答案.

五、本书在编写过程中，征求了部分教师和教研人员的意见，在此向北京市的王占元、郭立昌、明知白、张长胜，天津市的烟学敏、梁汝芳、吴雪娟，辽宁省的魏超群，吉林省的李浩明，江苏省的万庆炎，安徽省的薛凌，湖北省的冯善庆等同志表示衷心的感谢.

人民教育出版社中学数学室

1993 年 10 月

目　录

第三章　三角形 …… 1

一　三角形 …… 2

3.1　关于三角形的一些概念 …… 2

3.2　三角形三条边的关系 …… 7

3.3　三角形的内角和 …… 10

二　全等三角形 …… 20

3.4　全等三角形 …… 20

读一读　全等变换 …… 23

3.5　三角形全等的判定(一) …… 25

3.6　三角形全等的判定(二) …… 34

3.7　三角形全等的判定(三) …… 38

3.8　直角三角形全等的判定 …… 48

3.9　角的平分线 …… 51

三　尺规作图 …… 57

3.10　基本作图 …… 57

3.11　作图题举例 …… 62

读一读　三等分角 …… 65

四　等腰三角形 …… 66

3.12　等腰三角形的性质 …… 66

3.13　等腰三角形的判定 …… 74

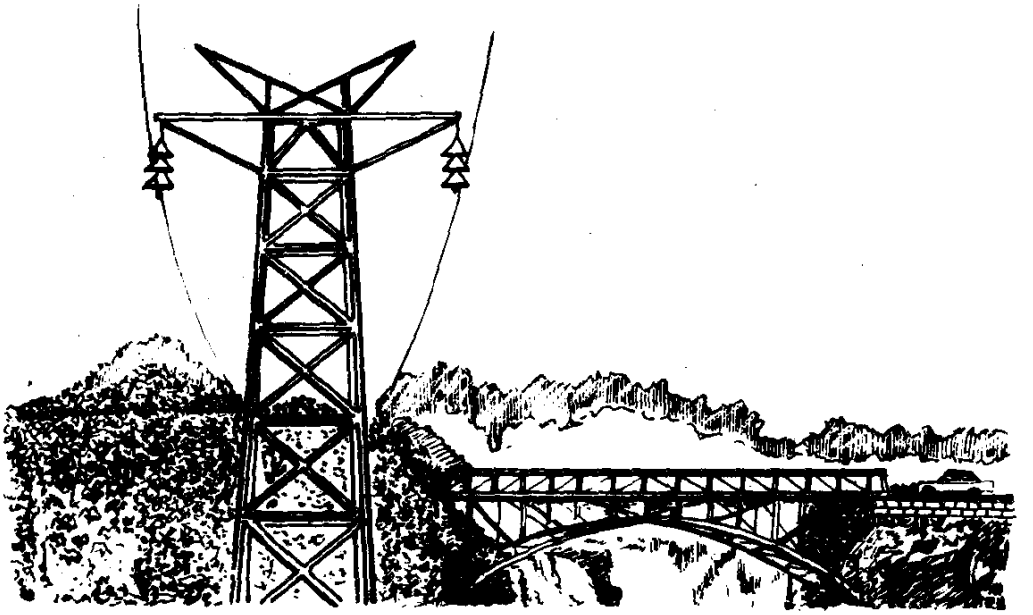
读一读　三角形中边与角之间的不等关系 …… 81

3.14　线段的垂直平分线 …… 86

3.15 轴对称和轴对称图形 …… 88
五 勾股定理 …… 98
3.16 勾股定理 …… 98
3.17 勾股定理的逆定理 …… 104
读一读 勾股定理的证明 …… 109
小结与复习 …… 110
复习题三 …… 114
自我测验三 …… 119
第四章 四边形 …… 121
一 四边形 …… 122
4.1 四边形 …… 122
4.2 多边形的内角和 …… 127
读一读 巧用材料 …… 131
二 平行四边形 …… 132
4.3 平行四边形及其性质 …… 132
4.4 平行四边形的判定 …… 138
4.5 矩形、菱形 …… 147
4.6 正方形 …… 156
读一读 完美的正方形 …… 162
4.7 中心对称和中心对称图形 …… 163
三 梯形 …… 169
4.8 梯形 …… 169
4.9 平行线等分线段定理 …… 176
4.10 三角形、梯形的中位线 …… 179
小结与复习 …… 186

复习题四 …… 190
自我测验四 …… 195
第五章 相似形 …… 197
一 比例线段 …… 198
5.1 比例线段 …… 198
5.2 平行线分线段成比例定理 …… 208
读一读 黄金分割 …… 220
二 相似三角形 …… 222
5.3 相似三角形 …… 222
5.4 三角形相似的判定 …… 225
5.5 相似三角形的性质 …… 238
5.6 相似多边形 …… 248
读一读 位似变换 …… 256
小结与复习 …… 258
复习题五 …… 261
自我测验五 …… 266

第三章　三 角 形



在小学里我们已经认识了三角形. 你能在上面的图里找出三角形吗? 请把它们勾画出来.

为什么这些物体都采用三角形结构? 为什么这些三角形的形状不完全相同? 怎样按实际需要画出这些三角形, 并计算出它们的边长和角度? 要解决这些问题, 需要对三角形有更进一步的认识, 进一步研究三角形的各种性质, 并掌握研究这些问题的方法. 在这一章里, 我们将比较系统地研究三角形, 同时学习逻辑推理的基本方法.

一　三角形

3.1　关于三角形的一些概念

像图 3－1 那样，由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫做**三角形**. 组成三角形的线段叫做**三角形的边**，相邻两边的公共端点叫做**三角形的顶点**，相邻两边所组成的角叫做**三角形的内角**，简称**三角形的角**.

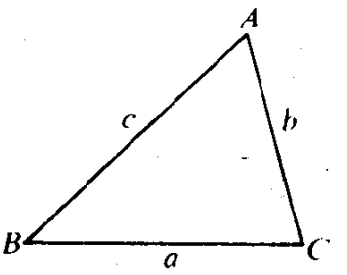


图　3－1

例如，图 3－1 中，线段 AB、BC、CA 是三角形的边，点 A、B、C 是三角形的顶点，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是三角形的角.

“三角形”可以用符号“△”表示，顶点是 A、B、C 的三角形，记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形 ABC”.

$\triangle ABC$ 的三边，有时也用 a、b、c 来表示. 如图3－1，顶点 A 所对的边 BC 用 a 表示，顶点 B 所对的边 AC 用 b 表示，顶点 C 所对的边 AB 用 c 表示.

下面介绍三角形中三种重要线段.

1. 三角形的角平分线

三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做**三角形的角平分线**.

在图 3－2 中，射线 AD 平分$\angle BAC$，交对边BC 于点 D，线段 AD 就是$\triangle ABC$ 的一条角平分线.

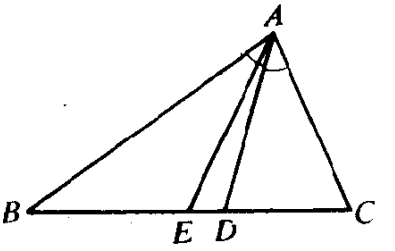


图 3－2

由定义可知，如果 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，那么有$\angle BAD=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC$.

2. 三角形的中线

在三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做**三角形的中线**.

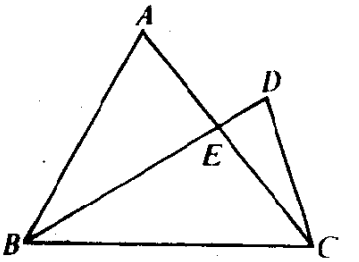
在图 3－2 中，E 是边 BC 的中点，线段AE 是$\triangle ABC$ 的一条中线.

由定义可知，如果 AE 是$\triangle ABC$ 的中线，那么有 $BE=EC=\frac{1}{2}BC$.

在一个三角形里，有三条角平分线，三条中线，

练　习

1. 图中有几个三角形？说出这些三角形，并分别说出它们的边和角.

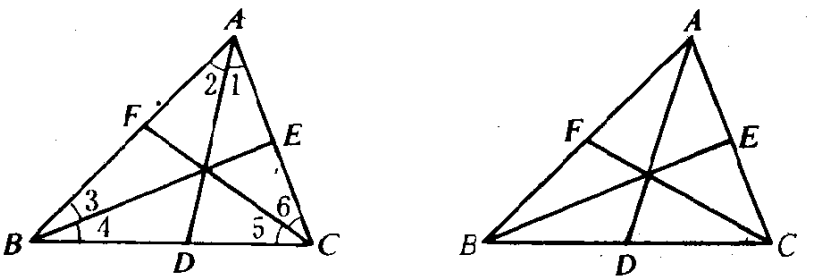


(第 1 题)

2. (1) 在$\triangle ABC$中，射线AD平分$\angle BAC$，AD是$\triangle ABC$的角平分线吗？为什么？

(2) 在$\triangle ABC$中，点M是边BC的中点，直线AM是$\triangle ABC$的中线吗？为什么？

3. 填空：如图．



(1)　　(2)

(第3题)

(1) AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条角平分线，则$\angle 1$ $=$_____，$\angle 3=\frac{1}{2}$_____，$\angle 6=$_____；

(2) AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条中线，则$AB=2$____，$BD=$_____，$AE=\frac{1}{2}$_____．

想一想

以3根火柴为边，可以组成一个三角形，用6根火柴能组成4个三角形吗？

3. 三角形的高

从三角形一个顶点向它的对边画垂线，顶点和垂足间的线段叫做**三角形的高线**，简称**三角形的高**. 如图 3－3 中，AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条高.

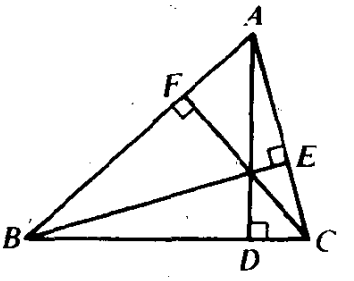


图 3－3

在图 3－3 中，如果 AD 是$\triangle ABC$ 中BC 边上的高，那么有$\angle ADB = 90°$，$\angle ADC = 90°$，$\angle ADB = \angle ADC$.

分别画出图 3－4 中锐角三角形、钝角三角形、直角三角形的高. 通过画图可以发现，锐角三角形的三条高都在三角形的内部；画钝角三角形的高时，有两个垂足落在边的延长线上，这两条高在三角形的外部；直角三角形中，有两条高恰好是它的两条边.

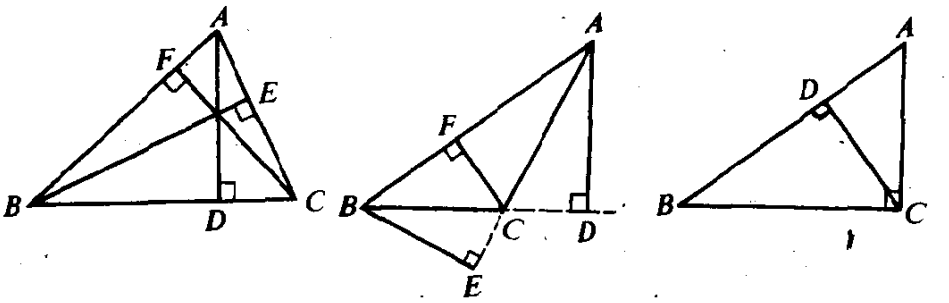


图 3－4

例 如图 3－5. 已知 $\triangle ABC$，用度量方法求 $\triangle ABC$ 面积的近似值(测量时，精确到 1 mm).

分析：任意选定一边为底，画出相应的高.

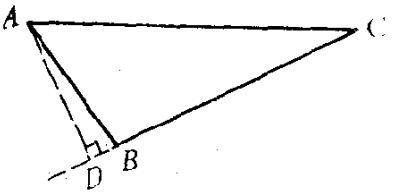


图 3-5

解：画△ABC 中 BC 边上的高 AD. 量得 $BC \approx 26$ mm，$AD \approx 15$ mm，所以

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \times BC$$

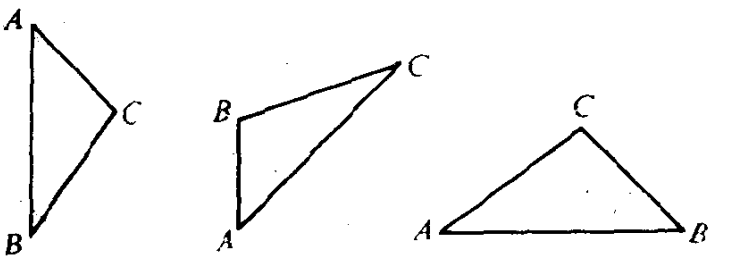
$$\approx \frac{1}{2} \times 15 \times 26$$

$$= 195\ (\text{mm}^2).$$

练　习

1. 任意画一个锐角三角形和一个钝角三角形，分别画出它们所有的高.

2. 在图上，分别画出△ABC 中AC 边上的高.



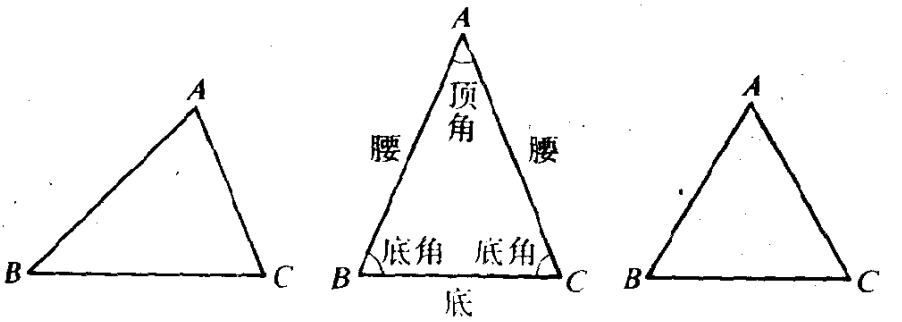
(第2题)

3. 过△ABC 的一个顶点A，画它的角平分线 AD、中线 AM、高 AH. 写出图中相等的线段、相等的角.

4. 在本节的例题中，分别以 AB、AC 为底计算△ABC 面积的近似值. 比较所得的面积是否相等.

3.2　三角形三条边的关系

三角形的三边，有的各不相等，有的有两边相等，有的三条边都相等．三边都不相等的三角形叫做**不等边三角形**(图 3－6(1))，有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**(图 3－6(2))，三边都相等的三角形叫做**等边三角形**(图 3－6(3))．



(1)　　(2)　　(3)

图　3－6

在等腰三角形中，相等的两边都叫做**腰**，另外一边叫做**底边**，两腰的夹角叫做**顶角**，腰和底边的夹角叫做**底角**．

等边三角形是特殊的等腰三角形，即底边和腰相等的等腰三角形．

三角形按边的相等关系分类如下：

三角形 { 不等边三角形；等腰三角形 { 底边和腰不相等的等腰三角形；等边三角形 }

观察图 3－6 中的各三角形，尽管它们的边长不完全一样，但是，如果把它们的任意两个顶点，例如 B、C，看作定点，由“联结两点的线中，线段最短”，可以得到

$$AB+AC>BC. \qquad ①$$

同理可得

$$AC+BC>AB, \qquad ②$$

$$AB+BC>AC. \qquad ③$$

由不等式①、②、③可得：

定理　三角形两边的和大于第三边.

如果 $BC>AC$，由不等式的性质，①式可变为

$$AB>BC-AC\ .$$

同样，不等式②、③也可以变形为

$$AC>AB-BC,\ BC>AC-AB\ .$$

于是有：

推论　三角形两边的差小于第三边.

推论是由定理直接推出的结论，和定理一样可以作为进一步推理的依据.

例　一个等腰三角形的周长为 18 cm .

(1)已知腰长是底边长的 2 倍，求各边长.

(2)已知其中一边长 4 cm，求其他两边长.

解：(1)设底边长为 x cm，则腰长为 $2x$ cm .

$$x+2x+2x=18\ ,$$

$\therefore\ x=3.6.$

所以三边长分别是 3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

(2)因为长为 4 cm 的边可能是腰，也可能是底，所以要分两种情况计算.

(i) 4 cm 长的边为底. 设腰长为x cm，由已知条件，有

$$2x+4=18,$$

$$\therefore\quad x=7.$$

(ii) 4 cm 长的边为腰. 设底边长为x cm，由已知条件，有

$$x+2\times4=18,$$

$$\therefore\quad x=10.$$

因为 $4+4<10$，即发生两边的和小于第三边的情况，所以以 4 cm 长为腰不能组成三角形，从而可得这个三角形其他两边长都是7 cm.

练　习

1. (口答) 有下列长度的三条线段能否组成三角形？为什么？

(1)3 cm，4 cm，8 cm；　　(2)5 cm，6 cm，11 cm；

(3)5 cm，6 cm，10 cm.

2. 以 4cm 长的线段为底，1cm 长的线段为腰，能否组成一个等腰三角形？如果以 4cm 长的线段为底组成一个等腰三角形，腰长应在什么范围内？

3.3 三角形的内角和

在小学里，我们曾像图3－7那样折叠一个三角形纸片，把三角形的三个角拼在一起，得到“三角形三个内角的和等于180°”的结论．实际上，也可以像图3－8(1)那样，把三角形纸片的两个角剪下拼在第三个角的顶点处，这样也可以得出上面的结论．

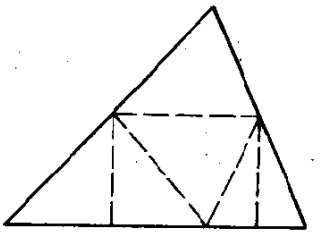
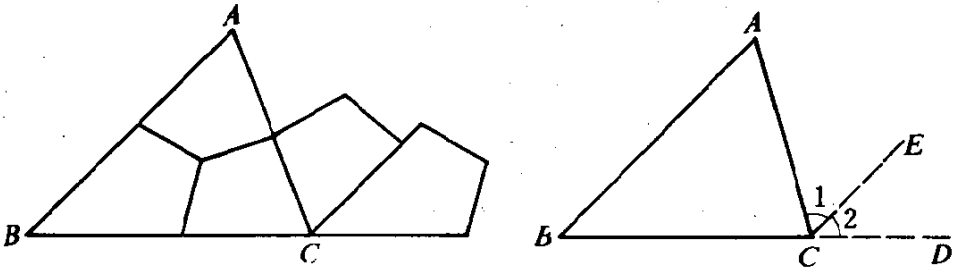


图 3－7



(1)　　(2)

图 3－8

现在，我们来证明这个结论．

三角形内角和定理　三角形三个内角的和等于180°．

已知：$\triangle ABC$ (图3－8(2))．

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$．

分析：上面的实验启发我们，要证明这个结论，可以延长一边 BC 得到一个平角 $\angle BCD$，然后以 CA 为一边，在 $\triangle ABC$ 的外部画 $\angle ACE=\angle A$．再证 $\angle ECD=\angle B$ 即可．

证明：作 BC 的延长线 CD，在△ABC 的外部，以 CA 为一边，CE 为另一边画∠1 = ∠A（图 3－8（2））．于是

$CE \parallel BA$（内错角相等，两直线平行）．

∴　∠B = ∠2（两直线平行，同位角相等）．

又∵ ∠1 + ∠2 + ∠ACB = 180°（平角的定义），

∴　∠A + ∠B + ∠ACB = 180°．

为了证明的需要，在原来图形上添画的线叫做**辅助线**．在平面几何里，辅助线通常画成虚线．

例 1　已知：在△ABC 中，∠C = ∠ABC = 2∠A，BD 是 AC 边上的高（图 3－9）．求 ∠DBC 的度数．

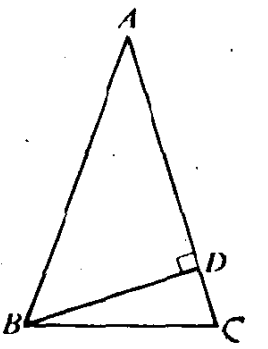


图　3－9

分析：∠DBC 在 △BDC 中，∠BDC = 90°，为求 ∠DBC，应先求出∠C．

解：设 ∠A = x°，则 ∠C = ∠ABC = 2x°．

∴　$x + 2x + 2x = 180$（三角形内角和定理）．

解方程，得 $x = 36$．

∴　∠C = 72°．

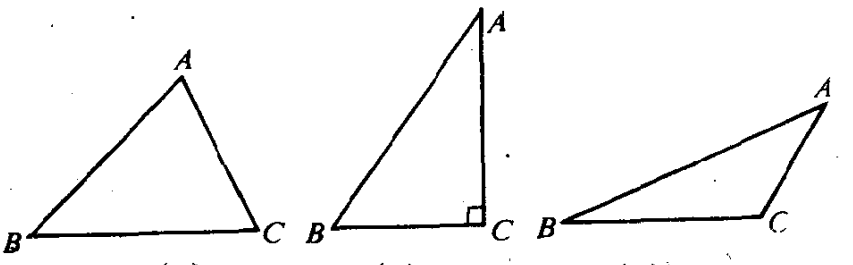
在△BDC 中，

∵　∠BDC = 90°（已知），

∴　∠DBC = 180° − 90° − 72°（三角形内角和定理）．

∴　∠DBC = 18°．

由三角形内角和定理我们知道，三角形的每一个内角都小于 180 °，一个三角形的三个内角可能都是锐角，也可能有一个是直角或钝角，但不可能有两个是直角或钝角.



(1)　　(2)　　(3)

图　3－10

三个角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**(图 3－10(1)).有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形**(图 3－10（2)).有一个角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**(图 3－10(3)).锐角三角形和钝角三角形合称**斜三角形**.

在直角三角形中，夹直角的两边叫做**直角边**，直角的对边叫做**斜边**. 两条直角边相等的直角三角形叫做**等腰直角三角形**.

由三角形内角和定理，容易得出下面的推论.

推论 1　直角三角形的两个锐角互余.

直角三角形可以用符号“Rt △”表示，直角三角形 ABC 可以写成“Rt $\triangle ABC$”.

三角形按角分类如下:

三角形 { 直角三角形；斜三角形 { 锐角三角形；钝角三角形 }

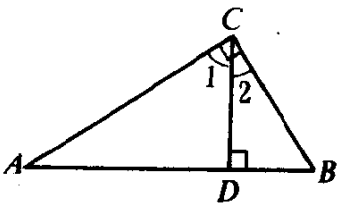
练　习

1. (口答) 一个三角形中，为什么不能有两个内角是钝角或直角？

2. (口答)如图，已知 $\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足是 D.

(1)图中有几个直角三角形？是哪几个？说出它们的直角边和斜边.

(2)$\angle 1$、$\angle 2$ 有什么关系？$\angle B$、$\angle 2$ 有什么关系？为什么？$\angle 1$ 和 $\angle B$ 是不是相等？为什么？



(第2题)

3. 填空：在△ABC 中，

(1)$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，则$\angle B=$ _____；

(2)$\angle A=50°$，$\angle B=\angle C$，则$\angle B=$ _____；

(3)$\angle A-\angle C=25°$，$\angle B-\angle A=10°$，则$\angle B=$ ____.

在证明三角形内角和定理时，曾如图 3－11 那样把△ABC 的一边 BC 延长，得到$\angle ACD$. 像这样：三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做**三角形的外角**.

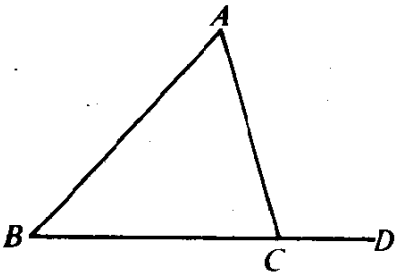


图　3－11

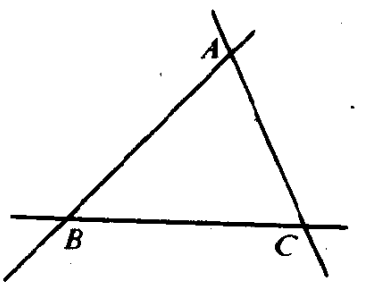


图　3－12

实际上，三角形的一个外角，就是三角形一个内角的邻补角．向两个方向延长三角形的各边，可以画出一个三角形所有的外角(图 3－12)．

由三角形内角和定理的证明，容易得到下面两个推论:

推论 2　三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和．

推论 3　三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角．

例2　已知: $\angle BAF$、$\angle CBD$、$\angle ACE$ 是$\triangle ABC$ 的三个外角(图 3－13)．

求证: $\angle BAF+\angle CBD+\angle ACE=360°$．

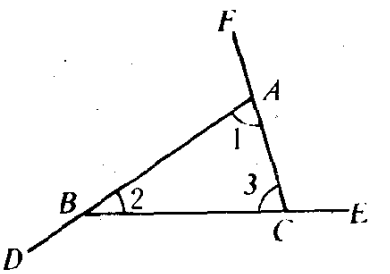


图　3－13

证明: 如图，$\because \angle BAF=\angle 2+\angle 3$，$\angle CBD=\angle 1+\angle 3$，$\angle ACE=\angle 1+\angle 2$（三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和），

$\therefore \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE$

$=2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$．

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$(三角形内角和定理)，

$\therefore \angle BAF+\angle CBD+\angle ACE$

$=2\times 180°=360°$．

例 3 已知：如图3－14，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，BE、CD 相交于点 F，$\angle A=62°$，$\angle ACD=35°$，$\angle ABE=20°$.

求：(1) $\angle BDC$ 的度数；

(2) $\angle BFD$ 的度数.

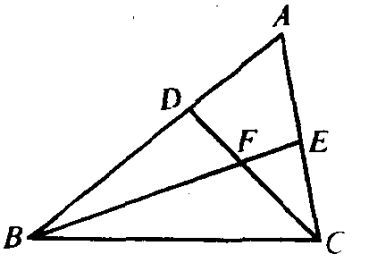


图 3－14

解：(1) ∵ $\angle BDC=\angle A+\angle ACD$ (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和).

∴ $\angle BDC=62°+35°=97°$.

(2) ∵ $\angle BFD=180°-\angle BDC-\angle ABE$ (三角形内角和定理)，

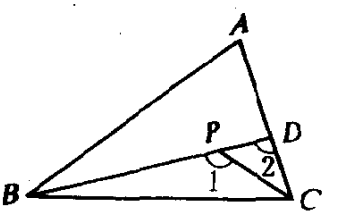
∴ $\angle BFD=180°-97°-20°=63°$.

练 习

1. 画一个三角形，再画出它所有的外角．一个三角形有几个外角？这些外角中有相等的吗？为什么？

2. 在△ABC 中，$\angle BAC=50°$，$\angle ABC=60°$，那么 $\angle ACB$ 等于多少度？与 $\angle ACB$ 相邻的一个外角等于多少度？为什么？

3. 如图，P 是△ABC 内一点，延长 BP 交 AC 于点 D．用符号“＜”表示 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle A$ 的关系.



(第3题)

习 题 3.1

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 什么样的图形叫做三角形？

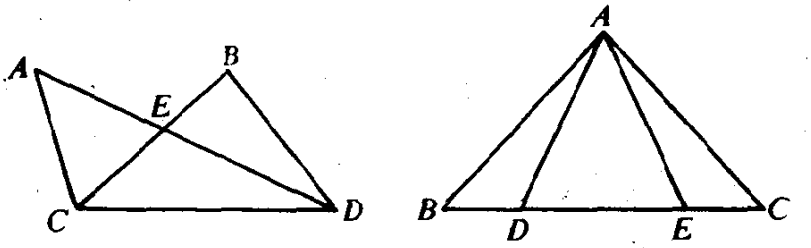
(2) 什么样的线段叫做三角形的角平分线？中线？高？三角形的角平分线与一个角的平分线有什么区别？

(3) 三角形三边之间有什么大小关系？

(4) 三角形内角和定理及三个推论的内容是什么？

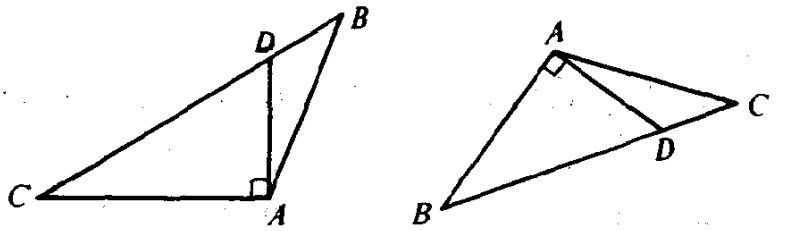
(5) 按边、按角怎样对三角形进行分类？

2. 指出下面图中各有几个三角形，并用符号写出来.



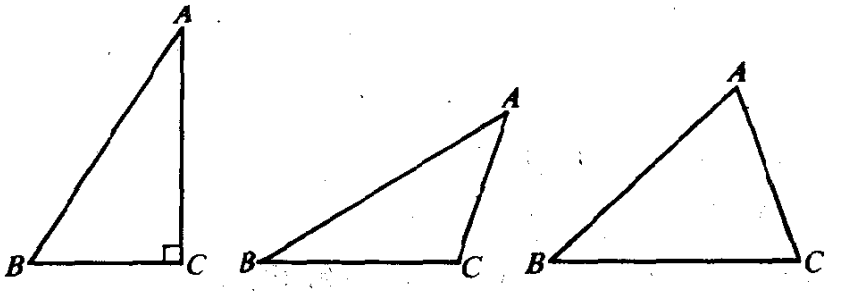
(第 2 题)

3. 下面各图中的 AD 是 $\triangle ABC$ 的高吗？若不是，画出正确的图形.



(第 3 题)

4. 在下面每个三角形中，过顶点 A 画出中线、角平分线和高.



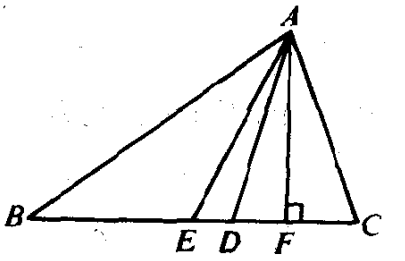
（第4题）

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 AE 是中线，AD 是角平分线，AF 是高. 根据已知条件填空：

(1) $BE=$ ____ $=\frac{1}{2}$ ____；

(2) $\angle BAD=$ ____ $=\frac{1}{2}$ ____；

(3) $\angle AFB=$ ____ $=90°$.



（第5题）

6. 已知$\triangle ABC$ 的周长是 12 cm，$c+a=2b$，$c-a=2$ cm，a、b、c 各等于多少？

7. 两根木棒的长分别是 7 cm 和 10 cm，要选择第三根木棒，将它们钉成一个三角形，第三根木棒的长有什么限制？

8. (1) 已知等腰三角形的一边等于 5，一边等于 6，求它的周长；

(2) 已知等腰三角形的一边等于 4，一边等于 9，求它的周长.

9. 已知等腰三角形的周长是 16 cm，腰比底边长 2 cm，求这个等腰三角形各边的长.

10. 根据下列条件，求 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 的大小：

(1) $\angle A = 65°40'$，$\angle B = 36°25'$；

(2) $\angle B = \angle C = 2\angle A$；

(3) $\angle A = 105°$，$\angle B - \angle C = 15°$；

(4) $\angle A = \angle B = \angle C$.

11. (1) 在直角三角形中，一个锐角是 30°，求另一个锐角.

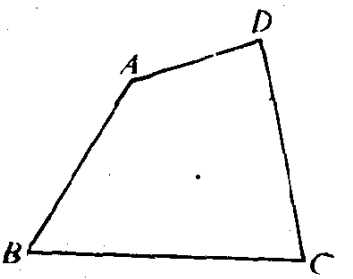
(2) 一个直角三角形的两个锐角相等，求各锐角的度数.

12. 适合下列条件的 $\triangle ABC$ 是锐角三角形、直角三角形、还是钝角三角形？

(1) $\angle A = \angle B = \angle C$；　(2) $\angle A + \angle B = \angle C$；

(3) $\angle A = \angle B = 30°$；　(4) $\angle A = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{3}\angle C$.

13. 一个大型模板如图，设计要求 BA 与 CD 相交成 30° 角，DA 与 CB 相交成 20° 角. 怎样通过测量 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的度数，来检查模板是否合格？



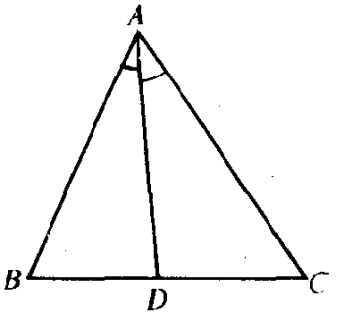
(第 13 题)

14. 下面两种分类方法对吗？若不对，怎样改正？

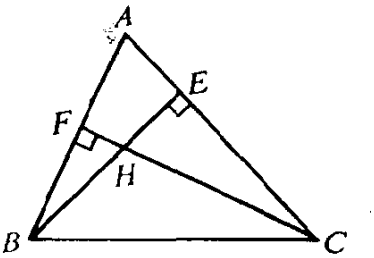
三角形 { 不等边三角形 / 等腰三角形 / 等边三角形 }　　三角形 { 锐角三角形 / 等腰直角三角形 / 钝角三角形 }

15. 三角形的一个外角等于与它相邻的内角的 4 倍，等于与它不相邻的一个内角的 2 倍. 求三角形各内角的度数.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 AD 是角平分线，$\angle B = 60°$，$\angle C = 45°$. 求 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 的度数.



(第16题)



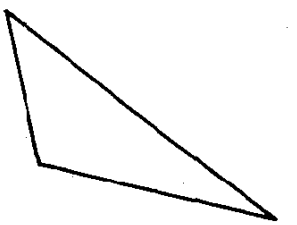
(第17题)

17. 在△ ABC 中，已知$\angle ABC=66°$，$\angle ACB=54°$，BE 是 AC 上的高，CF 是 AB 上的高，H 是 BE 和 CF 的交点. 求$\angle ABE$、$\angle ACF$ 和$\angle BHC$的度数.

B 组

1. 画一个等边三角形，画出它的三条角平分线、中线、高. 通过画图，能得出什么结论？

2. 在比例尺为 1:10000 的地图上，有一块三角形稻田(如图). 用什么方法能算出这块稻田面积的近似值？近似值是多少?(测量时，精确到 1 mm.)



(第2题)

3. 完成下面证明.

已知：如图，P 是△ ABC 内一点.

求证：$\angle BPC>\angle BAC$.

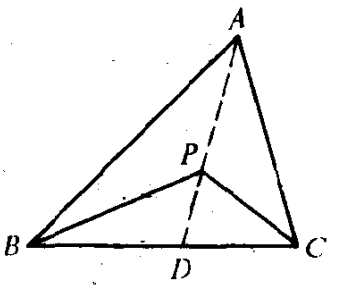
证明：连结 AP，并延长到D.

∵ $\angle BPD>\angle BAD$(　　)，

$\angle DPC>\angle DAC$(　　)，

∴ $\angle BPD+\angle DPC>\cdots\cdots$，

即$\angle BPC>\angle BAC$.



(第3题)

二　全等三角形

3.4　全等三角形

把一块样板按在纸板上，画下图形，照图形裁下来的纸板就和样板完全一样，把样板和裁得的纸板放在一起能够完全重合．从同一张底片冲洗出来的两张照片上的图形，放在一起也能够完全重合．

能够完全重合的两个图形叫做**全等形**．两个全等三角形重合时，互相重合的顶点叫做**对应顶点**，互相重合的边叫做**对应边**，互相重合的角叫做**对应角**．

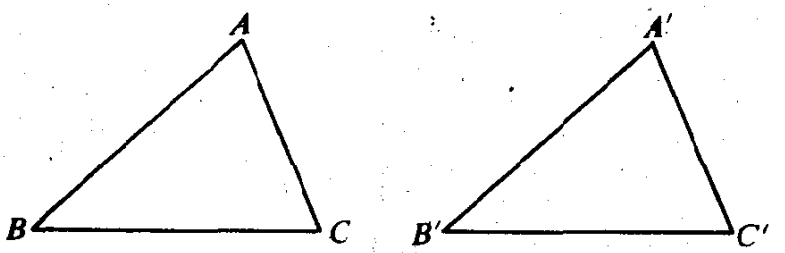


图　3－15

例如，图 3－15 中的两个三角形能够完全重合，就是全等三角形，“全等”用符号“≌”来表示，读作“全等于”．

图 3－15 中的△ ABC 和△ $A'B'C'$ 全等，记作“△ABC ≌△$A'B'C'$”．其中 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 是对应顶点，BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$、AB 和 $A'B'$ 是对应边，$\angle A$ 和 $\angle A'$、$\angle B$ 和 $\angle B'$、$\angle C$ 和 $\angle C'$ 是对应角．

记两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上．例如图 3－16 中的两个三角形全等，点 A 与点 D，点 B 与点 F，点 C 与点 E 是对应顶点，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$．

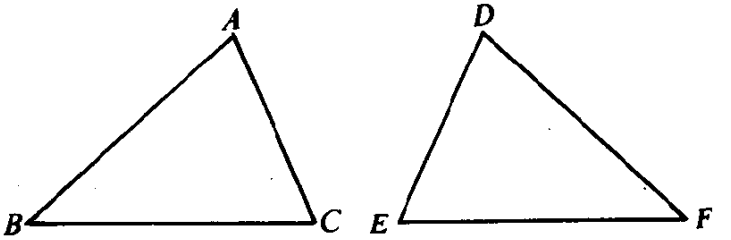


图　3－16

我们知道，能够重合的两条线段是相等的线段，能够重合的两个角是相等的角，所以

全等三角形的对应边相等；

全等三角形的对应角相等．

已知 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$（图 3－16），可以作出下面推理：

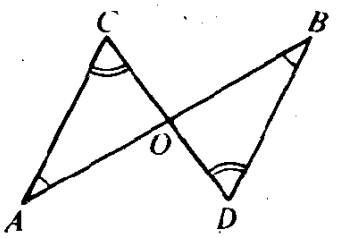
$\because$　$\triangle ABC \cong \triangle DFE$（已知），

$\therefore$　$AB=DF$，$BC=FE$，$AC=DE$（全等三角形的对应边相等），

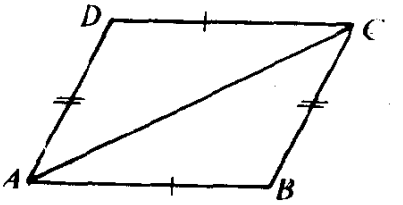
$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle F$，$\angle C=\angle E$（全等三角形的对应角相等）．

练　习

1. (口答) 如图，$\triangle AOC \cong \triangle BOD$，$\angle A$ 和 $\angle B$，$\angle C$ 和 $\angle D$ 是对应角，说出对应边和另外一组对应角.



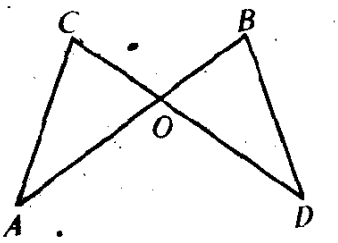
(第1题)



(第2题)

2. (口答) 如图，$\triangle ABC \cong \triangle CDA$，$AB$ 和 CD，BC 和 DA 是对应边，说出对应角和另外一组对应边. 由对应边找对应角，由对应角找对应边有什么规律?

3. (口答) 如图，$\triangle OCA \cong \triangle OBD$，$C$ 和 B，A 和 D 是对应顶点，说出这两个三角形中相等的边和角.



(第3题)

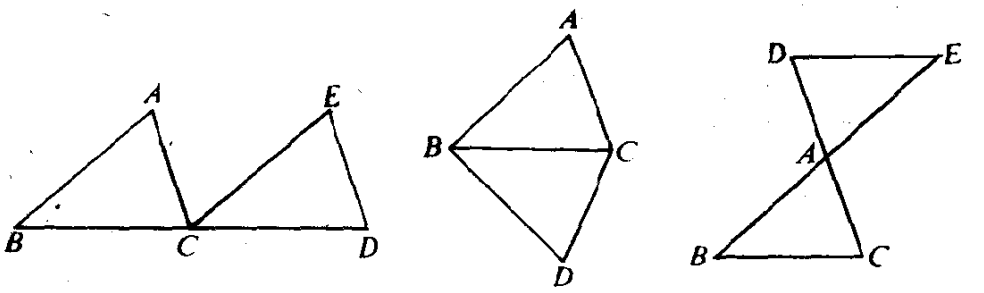
想一想

在两个全等的三角形中，已知两对对应顶点，怎样确定它们的对应边、对应角? 已知两对对应边，怎样确定它们的对应角?

读一读

全等变换

拿一张纸对折后，剪成两个全等的三角形．把这两个三角形一起放到图 1 中△*ABC* 的位置上．试一试，如果其中一个三角形不动，怎样移动另一个三角形，能够得到图 1 中的各图形?



(1)　　(2)　　(3)

图　1

通过实际操作可以知道，把△*ABC* 沿直线 *BC* 移动线段 *BC* 那样长的距离，可以变到△*ECD* 的位置(图 1(1))；以 *BC* 为轴把△*ABC* 翻折 180°，可以变到△*DBC* 的位置(图 1(2))；以点 *A* 为中心，把△ *ABC* 旋转 180°，可以变到△*AED* 的位置(图 1(3))．这些图形中的两个三角形之间有这样的关系，其中一个三角形是由另一个三角形按平行移动、翻转、旋转等方法得到的．像这样，按一定方法把一个图形变成另一个图形叫做图形变换．

经过图形变换，图形的一些性质改变了，而另一些性质仍然保留下来．上面三个图形经过变换，图形的位置变化了，但形状大小都没有改变，即变换前后的图形全等．像这样，只改变图形的位置，而不改变其形状大小的图形变换叫做全等变换．

利用图形变换，可以为研究几何图形提供方便．

试一试，你能用两个全等三角形拼成下列各图形吗？这些图形都可以看成一个三角形经过全等变换得到的．

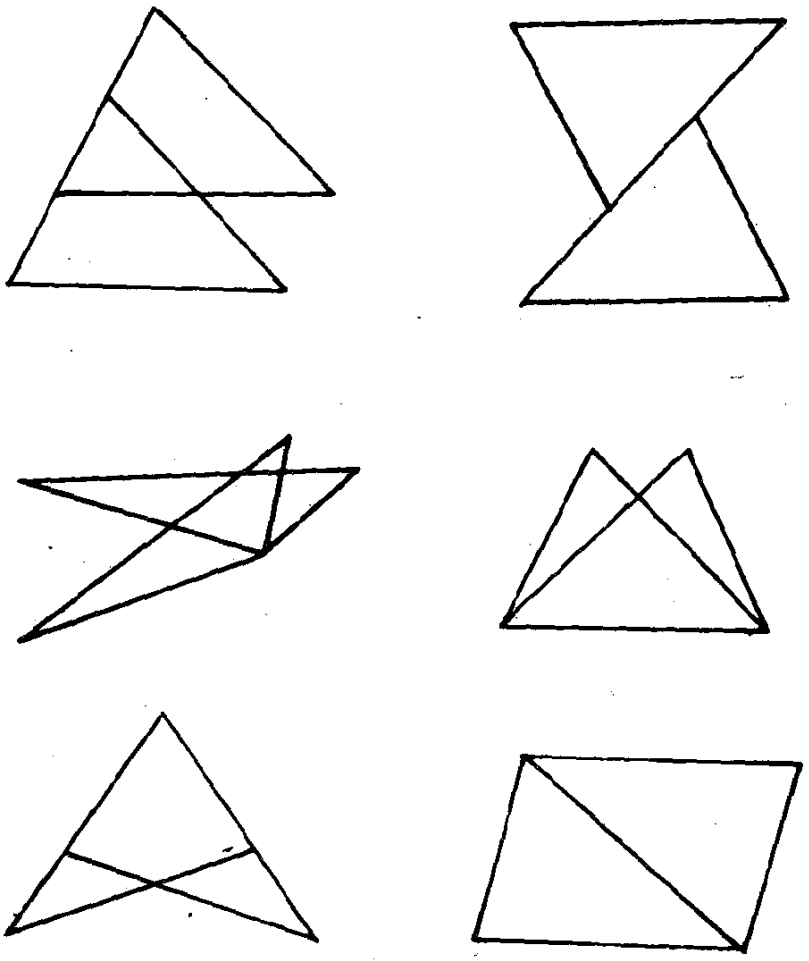


图　2

3.5 三角形全等的判定(一)

根据定义判定两个三角形全等，需要知道三条边对应相等和三个角对应相等．实际上要确定两个三角形全等，并不需要这么多条件．看下面画全等三角形的例子．

如图 3－17，$\triangle ABC$ 是任意一个三角形．画 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle A'=\angle A$，$A'B'=AB$，$A'C'=AC$．

画法：1．画 $\angle MA'N=\angle A$（如图 3－18）．

2．在射线 $A'M$、$A'N$ 上分别取 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$．

3．连结 $B'C'$，得 $\triangle A'B'C'$．

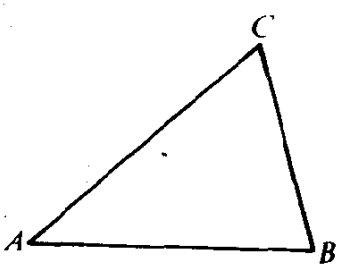


图 3－17

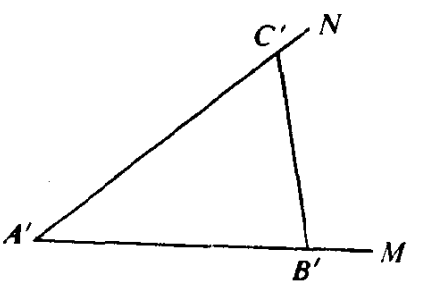


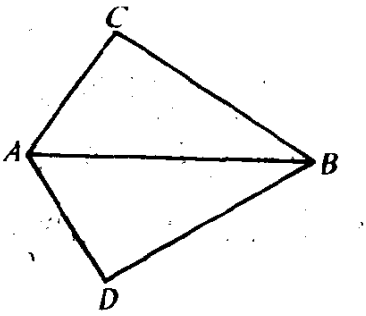
图 3－18

把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下，放到 $\triangle ABC$ 上，可以看到它们是全等的．这个例子说明，有两条边和它们的夹角对应相等，这两个三角形全等．我们把这个事实作为判定两个三角形全等的公理：

边角边公理　有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等(可以简写成“**边角边**”或“*SAS*”)．

例 1　已知：如图 3－19，$AC=AD$，$\angle CAB=\angle DAB$．

求证：$\triangle ACB \cong \triangle ADB$.



证明：在$\triangle ACB$和$\triangle ADB$中，

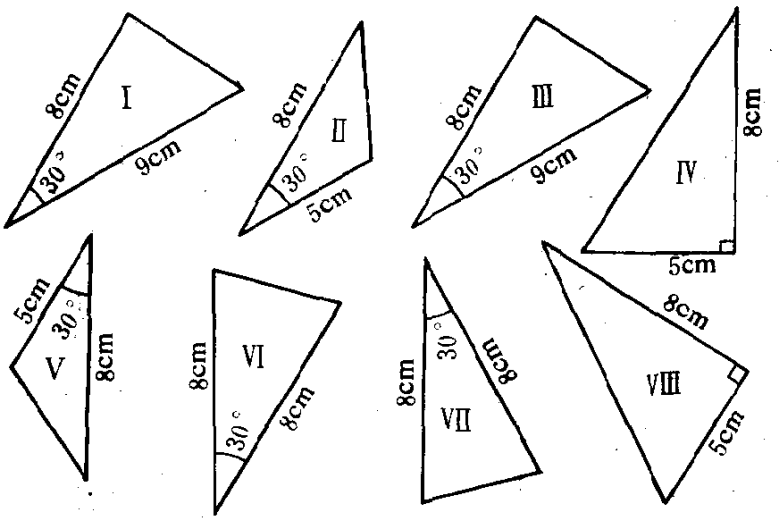
$$\begin{cases} AC=AD\ (\text{已知}), \\ \angle CAB=\angle DAB\ (\text{已知}), \\ AB=AB\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ACB \cong \triangle ADB\ (SAS)$.

图 3－19

练 习

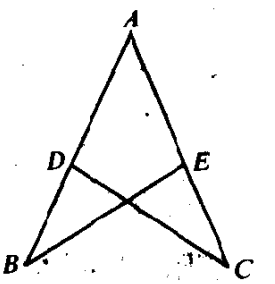
1. 在下列图中找出全等的三角形，并把它们用符号写出来.



(第 1 题)

2. 已知：如图，$AB=AC, AD=AE$.

求证：$\triangle ABE \cong \triangle ACD$.



(第 2 题)

例 2 已知：$AD \parallel BC$，$AD=CB$（图 3－20）.

求证：$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

分析：观察图 3－20，题目中的已知直接给出了 $AD=CB$，且有 $AC=CA$，但没有给出夹角（$\angle 1$，$\angle 2$）相等. 这时应先设法证明 $\angle 1 = \angle 2$.

证明：$\because$ $AD \parallel BC$（已知），

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CBA$ 中，

$$\begin{cases} AD=CB \text{（已知）}, \\ \angle 1 = \angle 2 \text{（已证）}, \\ AC=CA \text{（公共边）}, \end{cases}$$

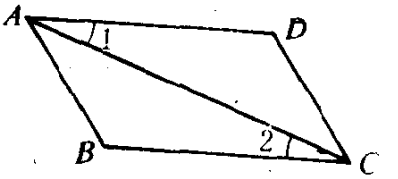


图 3－20

$\therefore$ $\triangle ADC \cong \triangle CBA$ (SAS) .

例 3 已知：如图 3－21，$AD \parallel BC$，$AD=CB$，$AE=CF$.

求证：$\triangle AFD \cong \triangle CEB$.

分析：本题已知中的前两个条件，与例 2 的已知条件相同，但是没有公共边. 比较图 3－20、图 3－21 可以发现，图 3－21 是图 3－20 中一个三角形平行移动得到的. 利用 $AE=CF$，可以证明 $AF=CE$.

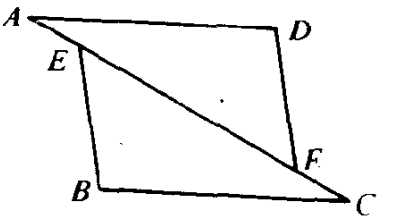


图 3－21

证明：$\because$ $AD \parallel BC$（已知），

$\therefore$ $\angle A = \angle C$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because$ $AE=CF$ (已知),

$\therefore$ $AE+EF=CF+EF$.

即 $AF=CE$.

在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle CEB$ 中,

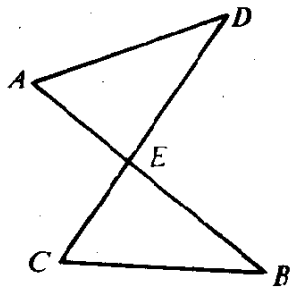
$$\begin{cases} AD=CB \text{ (已知)}, \\ \angle A=\angle C \text{ (已证)}, \\ AF=CE \text{ (已证)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AFD \cong \triangle CEB$ (SAS).

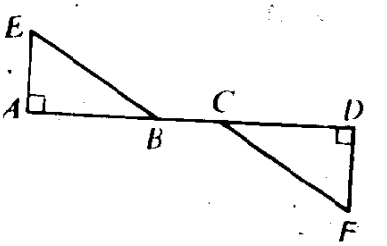
练 习

1. 已知: 如图, AB 和 CD 相交于点 E, $EA=EC$, $ED=EB$.

求证: $\triangle AED \cong \triangle CEB$.



(第1题)



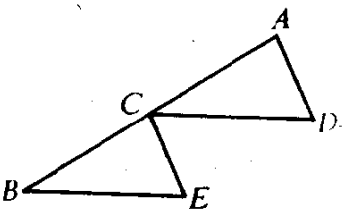
(第2题)

2. 已知: 如图, 点 A、B、C、D 在同一条直线上, $AC=DB$, $AE=DF$, $EA \perp AD$, $FD \perp AD$, 垂足分别是 A、D.

求证: $\triangle EAB \cong \triangle FDC$.

3. 已知: 如图, 点 C 是 AB 的中点, $CD \parallel BE$, 且 $CD=BE$.

求证: $\triangle ACD \cong \triangle CBE$.



(第3题)

例 4 已知：如图3－22，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

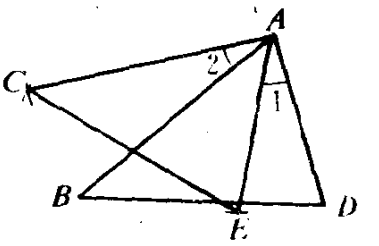


图 3－22

证明：$\because\ \angle 1=\angle 2$（已知），

$\therefore\ \angle 1+\angle EAB=\angle 2+\angle EAB$，

即 $\angle DAB=\angle EAC$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$$\begin{cases} AB=AC\text{（已知）}, \\ \angle DAB=\angle EAC\text{（已证）}, \\ AD=AE\text{（已知）}, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle ACE\ (SAS)$.

例 5 如图3－23，有一池塘．要测池塘两端 A、B 的距离，可先在平地上取一个可以直接到达 A 和 B 的点 C，连结 AC 并延长到 D，使 $CD=CA$．连结 BC 并延长到 E，使 $CE=CB$．连结 DE，那么量出 DE 的长，就是 A、B 的距离．为什么？按图写出“已知”、“求证”，并证明.

已知：AD 与 BE 交于点 C，$CA=CD$，$CB=CE$.

求证：$AB=DE$.

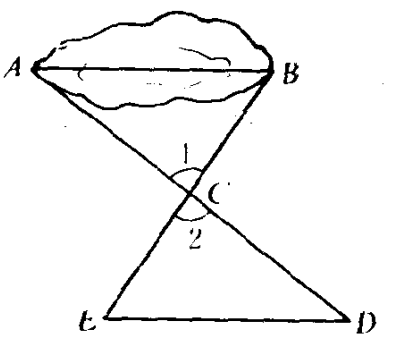


图 3－23

证明：在$\triangle ACB$和$\triangle DCE$中，

$$\begin{cases} CA=CD\text{(已知)}, \\ \angle 1=\angle 2\text{(对顶角相等)}, \\ CB=CE\text{(已知)}, \end{cases}$$

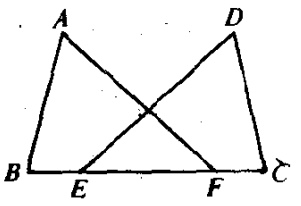
$\therefore\quad \triangle ACB\cong\triangle DCE\,(SAS)$.

$\therefore\quad AB=DE$(全等三角形的对应边相等).

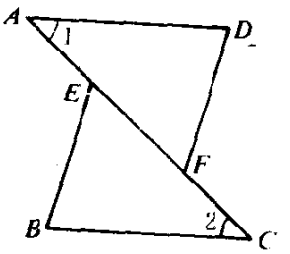
因为全等三角形的对应边、对应角相等，所以，证明分别属于两个三角形的线段相等或者角相等的问题，常常通过证明这两个三角形全等来解决.

练　习

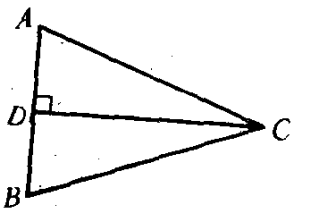
1. 已知：如图，点E、F在BC上，$BE=CF$，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$．求证：$AF=DE$.



(第1题)



(第2题)



(第3题)

2. 已知：如图，点A、E、F、C在同一条直线上，$AD=CB$，$\angle 1=\angle 2$，$AE=CF$．求证：$\angle B=\angle D$.

3. 已知：如图，$AB\perp CD$，垂足为D，$AD=BD$.

求证：$AC=BC$.

习 题 3.2

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

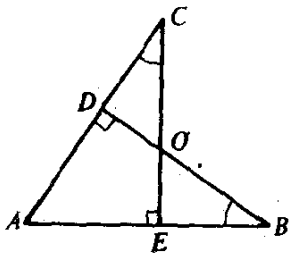
(1)什么样的两个三角形叫做全等三角形？

(2)全等三角形有哪些性质？

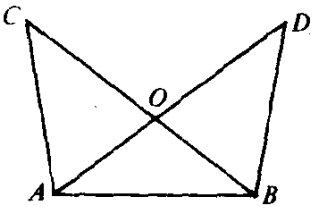
(3)已知两边及夹角，怎样画出这个三角形？

(4)“边角边”公理的内容是什么？

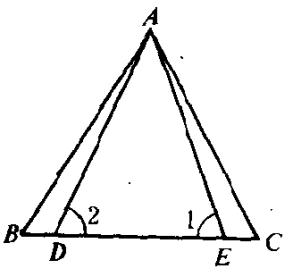
2. 如图，已知$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B = \angle C$，指出其他的对应角和对应边；又知$\triangle OBE \cong \triangle OCD$，指出所有的对应角和对应边.



(第2题)



(第3题)



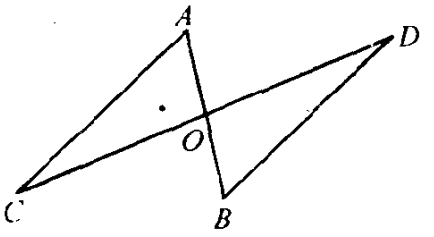
(第4题)

3. 如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle BAD$，$BC = AD$，指出其他的对应边和对应角；又知$\triangle OAC \cong \triangle OBD$，指出所有的对应边和对应角.

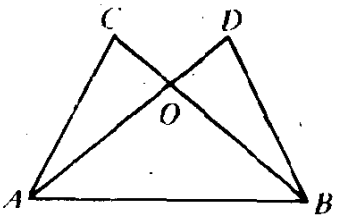
4. 如图，已知$\triangle ABE \cong \triangle ACD$，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle B = \angle C$. 指出其他的对应边和对应角.

5. 用刻度尺和量角器画$\triangle ABC$，使$\angle A=40°$，$AB=5\ cm$，$AC=3\ cm$，再量出BC边的长(精确到1 mm)．

6. 已知：如图，AB、CD相交于点O，$AO=BO$，$CO=DO$．求证：$\triangle AOC\cong\triangle BOD$．



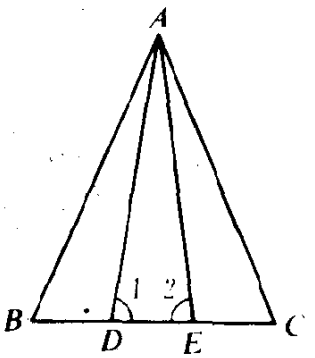
(第6题)



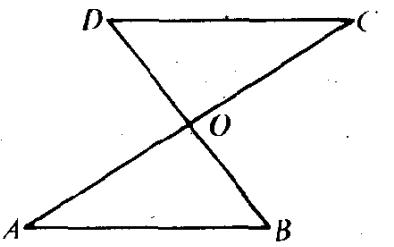
(第7题)

7. 已知：如图，$\angle CAB=\angle DBA$，$AC=BD$．求证：$\triangle CAB\cong\triangle DBA$．

8. 已知：如图，$AD=AE$，点D、E在BC上，$BD=CE$，$\angle 1=\angle 2$．求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$．



(第8题)

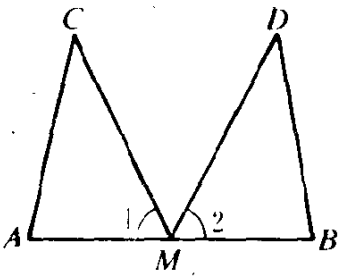


(第9题)

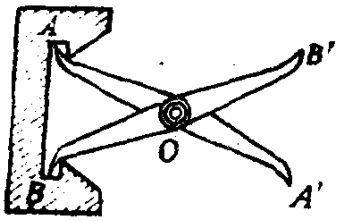
9. 已知：如图，AC和BD相交于点O，$OA=OC$，$OB=OD$．求证：$DC\parallel AB$．

10. 已知：M 是 AB 的中点，$MC=MD$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AC=BD$.



（第 10 题）



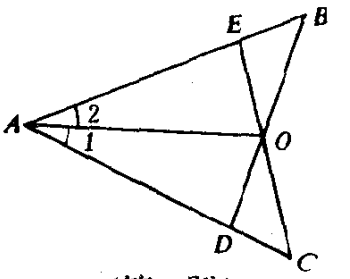
（第 11 题）

11. 如图，把两根钢条 AA'、BB' 的中点连在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具（卡钳）. 按图写出“已知”、“求证”，并证明 $AB=A'B'$.

B 组

1. 已知：如图，在 AB、AC 上各取一点 E、D，使 $AE=AD$. 连结 BD、CE 相交于点 O，连结 AO，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$\angle B=\angle C$.



（第 1 题）

（提示：$\angle AEO$、$\angle ADO$ 分别是△OEB、△ODC 的一个外角.）

2. 在△ ABC 中，$\angle ACB=90°$，延长 BC 至 B'，使 $CB'=BC$，连结 AB'，那么 △ABB' 是等腰三角形. 画出图形，写出已知和求证，并且进行证明.

3. 在室外找一个中间有障碍物的地方，用例 5 的方法，测量障碍物两边某两点的距离.

3.6 三角形全等的判定(二)

现在，我们再介绍一种画一个三角形与已知三角形全等的方法.

如图3－24，$\triangle ABC$ 是任意一个三角形，画 $\triangle A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$.

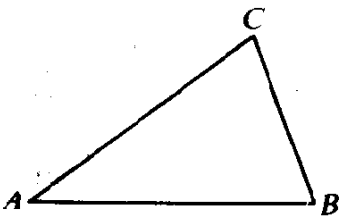


图 3－24

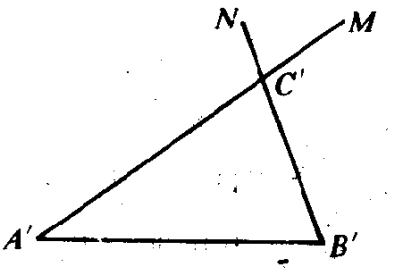


图 3－25

画法：1. 画线段 $A'B'=AB$（如图3－25）.

2. 在 $A'B'$ 的同旁，分别以 A'、B' 为顶点画 $\angle MA'B'=\angle A$，$\angle NB'A'=\angle B$，$A'M$、$B'N$ 交于点 C'，得 $\triangle A'B'C'$.

剪下 $\triangle A'B'C'$ 放到 $\triangle ABC$ 上，可以发现 $\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$. 这样可以得到判定三角形全等的另一个公理：

角边角公理　有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可以简写成“**角边角**”或“*ASA*”）.

例1　已知：点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，BE 和 CD 相交于点 O，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$（图3－26）.

求证：$BD=CE$.

分析：BD 和 CE 分别在△BOD 和△COE 中，由已知条件不能直接证明△BOD ≌ △COE. 但已知 $AB=AC$，AB、BD 及 AC、CE 分别在一条直线上，如果能证明 $AD=AE$，就可以得到 $BD=CE$. 而 AD 和 AE 分别在△ADC 和△AEB 中，可由已知条件证得△ADC ≌ △AEB.

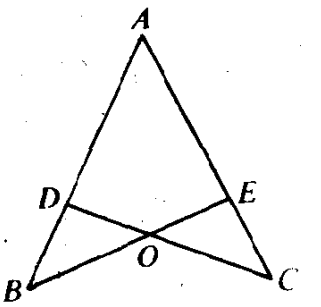


图 3-26

证明：在△ADC 和△AEB 中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle A\ (\text{公共角}), \\ AC=AB\ (\text{已知}), \\ \angle C=\angle B\ (\text{已知}), \end{cases}$$

∴ △ACD ≌△ABE (ASA).

∴ $AD=AE$ (全等三角形的对应边相等).

又∵ $AB=AC$ (已知),

∴ $BD=CE$.

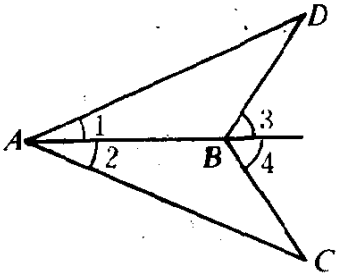
练 习

1. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

   求证：$AC=AD$.

2. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$.

   求证：$AC=AD$.



(第 1、2 题)

两个三角形中，如果有两个角对应相等，由三角形内角和定理，可以推出第三个角也相等．由此可以直接得到“角边角”公理的推论：

推论　有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等(可以简写成“**角角边**”或“***AAS***”)．

例 2　已知：如图3－27，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高．

求证：$AD = A'D'$．

分析：已知$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，相当于已知它们的对应边相等，对应角相等．在证明过程中，可根据需要，选取其中的一部分相等关系．

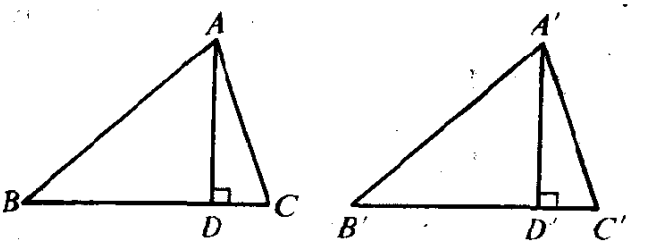


图　3－27

证明：∵　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(已知)，

∴　$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$(全等三角形的对应边、对应角相等)．

∵　AD、$A'D'$分别是$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$的高(已知)，

∴　$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$．

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中，

$$\begin{cases} \angle B=\angle B' \text{（已证）}, \\ \angle ADB=\angle A'D'B' \text{（已证）}, \\ AB=A'B' \text{（已证）}, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'(AAS)$.

$\therefore AD=A'D'$（全等三角形的对应边相等）.

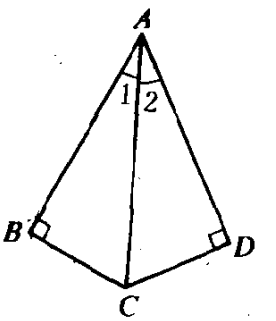
练　习

1. (1)两个直角三角形中，斜边和一个锐角对应相等，这两个三角形全等吗？为什么？

   (2)两个直角三角形中，有一条直角边和它的对角对应相等，这两个直角三角形全等吗？为什么？

2. 已知：如图，$AB \perp BC$, $AD \perp DC$，垂足分别为B、D，$\angle 1=\angle 2$.

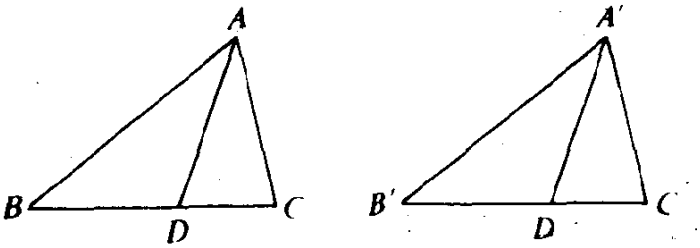
   求证：$AB=AD$.



(第2题)

3. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，$AD$、$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的角平分线.

   求证：$AD=A'D'$.



(第3题)

3.7 三角形全等的判定(三)

除了前面讲过的方法外，还可以用下面的方法画一个三角形与已知三角形全等.

如图 3－28. 已知任意△ABC，画一个△$A'B'C'$，使 $A'B'=AB$，$A'C'=AC$，$B'C'=BC$.

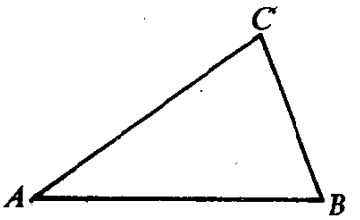


图 3－28

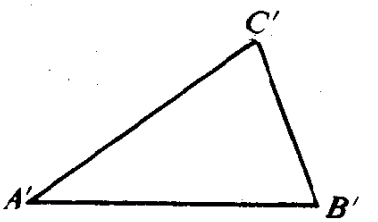


图 3－29

画法：1. 画线段 $A'B'=AB$（如图 3－29）.

2. 分别以 A'、B'为圆心，AC、BC 为半径画弧，两弧相交于点 C'.

3. 连结 $A'C'$、$B'C'$，得 △$A'B'C'$.

剪下△$A'B'C'$放在 △ABC上，可以看到 △$A'B'C'$ ≌ △ABC，由此可以得到判定两个三角形全等的又一个公理：

边边边公理　有三边对应相等的两个三角形全等(可以简写成“**边边边**”或“*SSS*”).

例 1　如图3－30，△ABC是一个钢架，$AB=AC$，AD 是连结点 A 与 BC 中点 D 的支架.

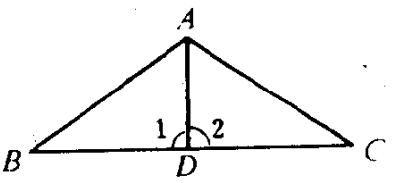


图 3－30

求证：$AD \perp BC$.

证明：在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases} AB = AC\ (\text{已知}), \\ AD = AD\ (\text{公共边}), \\ DB = DC\ (\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD \cong \triangle ACD\ (SSS)$.

$\therefore\ \angle 1 = \angle 2$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore\ \angle 1 = \frac{1}{2}\angle BDC = 90°$（平角定义）.

$\therefore\ AD \perp BC$（垂直定义）.

例 2 已知：如图3－31，$AB = DC, AD = BC$.

求证：$\angle A = \angle C$.

分析：要证明$\angle A = \angle C$，可设法使它们分别在两个三角形中，为此，只要连结BD即可.

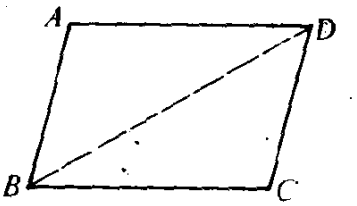


图 3－31

证明：连结BD.

在$\triangle BAD$和$\triangle DCB$中，

$$\begin{cases} AB = CD\ (\text{已知}), \\ AD = CB\ (\text{已知}), \\ BD = DB\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle BAD \cong \triangle DCB\ (SSS)$.

$\therefore\ \angle A = \angle C$（全等三角形的对应角相等）.

由边边边公理可以看出，只要三角形三边的长度一定，这个三角形的形状大小就完全确定. 例如，取三根长度适当的木条，用钉子把它们钉成一个三角形框架，所得到的框架形状和大小就固定了(图 3－32).

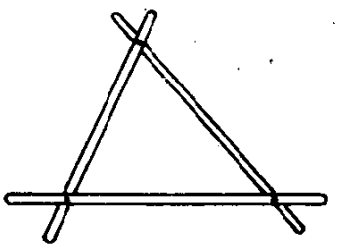


图 3－32

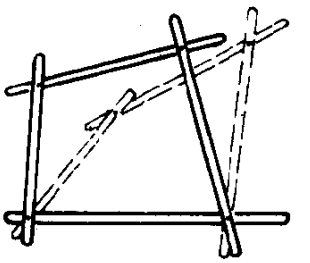


图 3－33

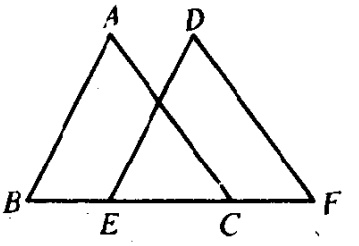
三角形这个性质叫做**三角形的稳定性**. 用四根木条钉成的框架就没有这个性质，它的形状是可以改变的(图 3－33).

三角形的稳定性在生产和生活中是很有用的. 例如，房屋的人字梁具有三角形的结构，它就坚固和稳定；在栅栏门上斜着钉一条(或两条)木板，构成一些三角形，就可以使栅栏门不变形. 大桥钢梁、起重机的支架都采用三角形结构，也是这个道理.

练　习

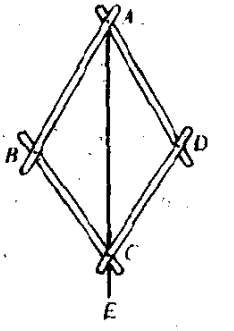
1. 已知：如图，点 B、E、C、F 在同一条直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$.

求证：$\angle A=\angle D$.



(第 1 题)

2. 如图是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD, BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是角平分线. 说明它的道理.



(第2题)

前面学过，由某三组边或角对应相等，可以判定两个三角形全等. 那么，在两个三角形的边或角中，是不是任意三组对应相等，这两个三角形一定全等呢？我们看下面两个例子.

例如，在$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$ 中，已知 $AB=AB$，$AC=AD$，$\angle B=\angle B$，显然它们不全等(图 3－34). 这说明，两边和其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等.

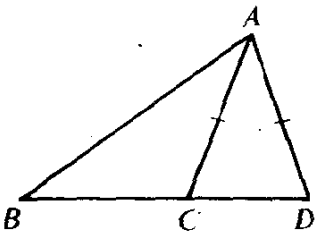


图 3－34

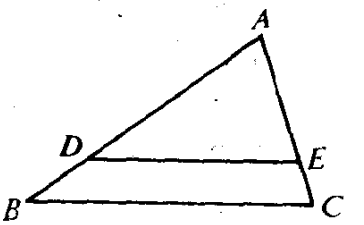


图 3－35

又如，在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中，如果 $DE \parallel BC$，那么 $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，又 $\angle A=\angle A$，但$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 并不全等(图 3－35). 这说明三个角对应相等的两个三角形也不一定全等.

就是说，要证明两个三角形全等，需要有三组边或角对应相等，但其中三个角对应相等，或两边和其中一边的对角对应相等，不能判定这两个三角形全等.

例 3 已知：如图3－36，$AB=CD$，$BC=DA$，E、F是AC上的两点，且$AE=CF$.

求证：$BF=DE$.

分析：观察图形，BF、DE分别在$\triangle CFB$和$\triangle AED$(或$\triangle ABF$和$\triangle CDE$)中，由已知条件不能直接证明这两个三角形全等.这时，可由已知条件先证明$\triangle ABC\cong\triangle CDA$，由此得$\angle 1=\angle 2$.

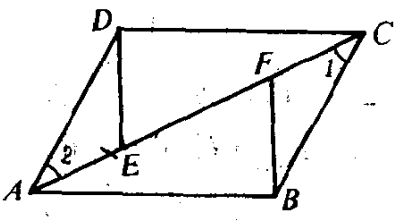


图 3－36

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$$\begin{cases} AB=CD\ (\text{已知}), \\ BC=DA\ (\text{已知}), \\ CA=AC\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle CDA\ (SSS)$.

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$ (全等三角形的对应角相等).

在$\triangle BCF$和$\triangle DAE$中，

$$\begin{cases} BC=DA\ (\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2\ (\text{已证}), \\ CF=AE\ (\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BCF \cong \triangle DAE\ (SAS)$.

$\therefore$ $BF = DE$ (全等三角形的对应边相等).

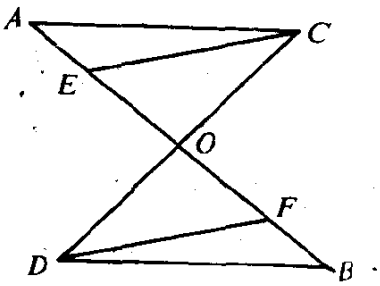
练 习

1. 已知$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB = A'B'$，$AC = A'C'$，$\angle B = \angle B'$，这两个三角形全等吗？画图说明.

2. 填表：

两个三角形中对应相等的边或角		是否全等（全等画“$\surd$”，不全等画“$\times$”）	公理或推论(简写)
三条边			
两边一角	两边夹角		
	两边与一边对角		
两角一边	两角夹边		
	两角与一角对边		
三 个 角			

3. 已知：如图，AB、CD相交于点O，$AC \parallel DB$，$OC = OD$，E、F为AB上两点，且$AE = BF$. 求证：$CE = DF$.



(第3题)

习 题 3.3

A 组

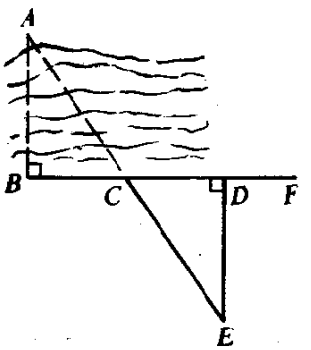
1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)已知两角及夹边或已知三边怎样画三角形?

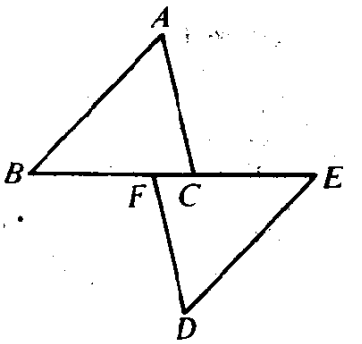
(2)我们学过哪些判定三角形全等的方法?

2. 用刻度尺和量角器画△ ABC，使∠ $A=28°$，∠ $B=33°$，$BC=4.5$ cm，再量出 AB、AC 的长(精确到 0.1 cm)。

3. 要测量河两岸相对的两点 A、B 的距离，可以在 AB 的垂线 BF 上取两点 C、D，使 $CD=BC$，再定出 BF 的垂线 DE，使 A、C、E 在一条直线上，这时测得的 DE 的长就是 AB 的长.写出已知和求证，并且进行证明.



(第 3 题)



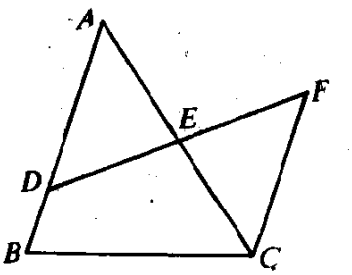
(第 4 题)

4. 已知：如图，点 B、F、C、E 在同一条直线上，$FB=CE$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel FD$.

求证：$AB=DE$，$AC=DF$.

5. 已知:如图，D 是△ ABC 的边 AB 上一点，DF 交 AC 于点 E，$DE=FE$，$FC \parallel AB$.

求证：$AE=CE$.



(第 5 题)

6. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 是锐角，$AB=AC$，AC、AB 边上的高分别为 BE、CF.

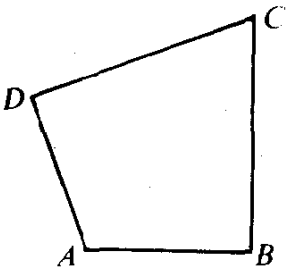
求证：$BE=CF$.

画出图形并证明.

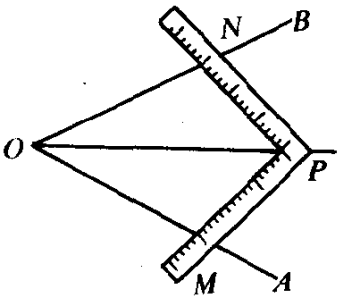
7. 已知三条边长分别为 6 cm，5 cm，4 cm，画出这个三角形，再量出各角的度数(精确到 1 °).

8. 已知：如图，$AB=AD$，$DC=CB$.

求证：$\angle B=\angle D$.



(第 8 题)

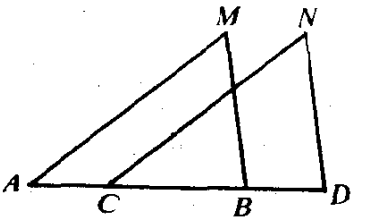


(第 9 题)

9. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图，$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA、OB 上分别取 $OM=ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与 M、N 重合. 过角尺顶点 P 的射线 OP 便是 $\angle AOB$ 的平分线. 根据做法，结合图形写出已知、求证、证明.

10. 已知：如图，点 A、C、B、D 在同一条直线上，$AC=BD$，$AM=CN$，$BM=DN$.

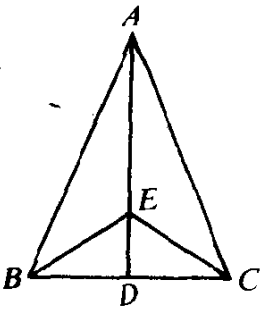
求证：$AM \parallel CN$，$BM \parallel DN$.



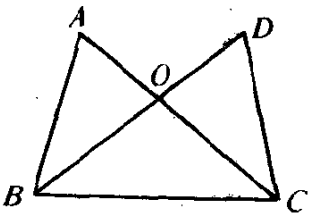
(第 10 题)

11. 已知:如图,$AB=AC$,$EB=EC$,AE 的延长线交 BC 于 D.

求证:$BD=CD$.



(第 11 题)

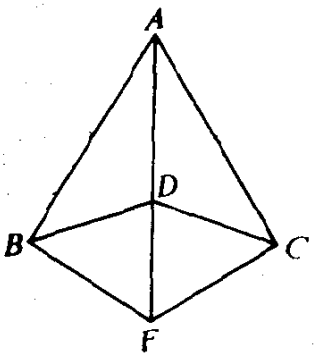


(第 12 题)

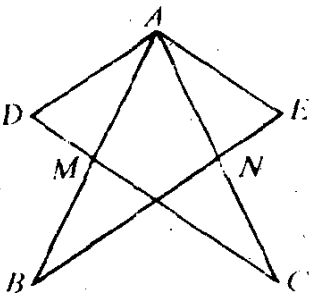
12. 已知:$\triangle ABC$ 和$\triangle DBC$ 的顶点 A 和 D 在 BC 的同旁,$AB=DC$,$AC=DB$,AC 和 DB 相交于点 O.求证:$OA=OD$.

13. 已知:如图,$AB=AC$,$DB=DC$. F 是 AD 的延长线上一点.

求证:$BF=CF$.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 已知:如图,$AB=AC$,$AD=AE$. AB、DC 相交于点 M,AC、BE 相交于点 N,$\angle DAB=\angle EAC$.

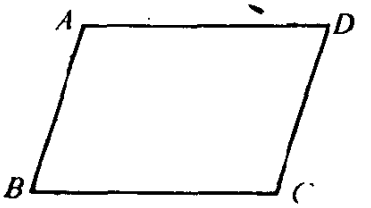
求证:$AM=AN$.

B 组

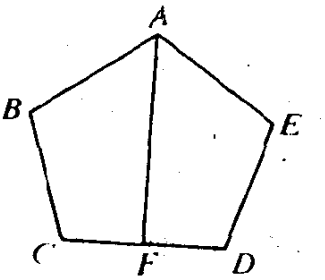
1. 已知：如图，$AB=CD$，$AD=BC$．求证：

(1) $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$；

(2) $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$．



(第1题)

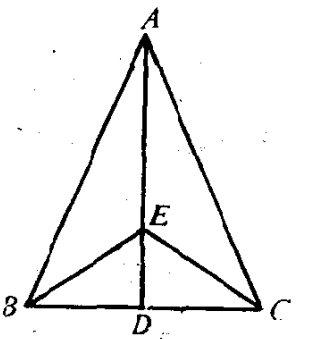


(第2题)

2. 已知：如图，$AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$，点 F 是 CD 的中点．求证：$AF \perp CD$．

3. 求证：如果两个三角形有两条边和其中一边上的中线对应相等，那么这两个三角形全等．

(提示：首先分清题设和结论，画出图形；再结合图形写出“已知”、“求证”、“证明”．)



如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BC的中点，点E在AD上．找出图中全等的三角形，并说明它们为什么是全等的．

3.8 直角三角形全等的判定

在3.7节中,已知两边及其中一边的对角,画出了两个不同的三角形,从而得出"有两边及其中一边的对角对应相等,这两个三角形不一定全等"的结论.如果"其中一边的对角"是直角,结果如何呢?我们先做下面例题.

例1 已知线段a、c($a<c$)(图3-37).画一个Rt$\triangle ABC$,使$\angle C=90°$,一直角边$CB=a$,斜边$AB=c$.

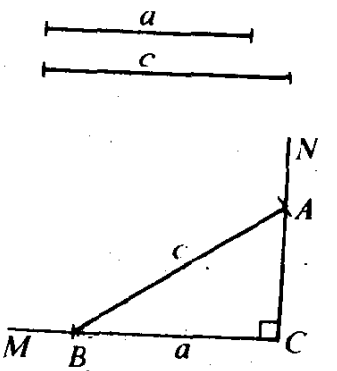


图 3-37

画法: 1. 画$\angle MCN=90°$(如图3-37).

2. 在射线CM上取$CB=a$.

3. 以B为圆心,c为半径画弧,交射线CN于点A.

4. 连结AB.

$\triangle ABC$就是所要画的直角三角形.

从画图过程可知,圆弧与射线CN只相交于一点,因此这样的三角形只能画出一个.就是说,斜边与一条直角边长一定,所画出的直角三角形就是唯一确定的.于是可以得到判定两个直角三角形全等的公理:

斜边、直角边公理 **有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等**(可以简写成"**斜边、直角边**"或"*HL*").

例 2 已知:如图3－38，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，CD、$C'D'$分别是高，并且$AC=A'C'$，$CD=C'D'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

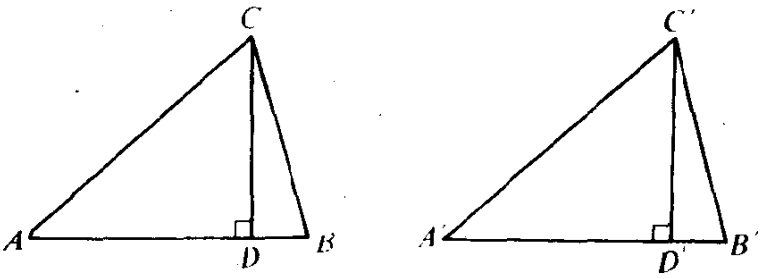


图 3－38

证明：∵ CD、$C'D'$分别是$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$的高(已知)，

∴ $\angle ADC=\angle A'D'C'=90°$.

在 Rt$\triangle ADC$和 Rt$\triangle A'D'C'$中，

$$\begin{cases} AC=A'C' \text{(已知)}, \\ CD=C'D' \text{(已知)}, \end{cases}$$

∴ Rt$\triangle ADC\cong$ Rt$\triangle A'D'C'(HL)$.

∴ $\angle A=\angle A'$(全等三角形的对应角相等).

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\begin{cases} \angle A=\angle A' \text{(已证)}, \\ AC=A'C' \text{(已知)}, \\ \angle ACB=\angle A'C'B' \text{(已知)}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (ASA).

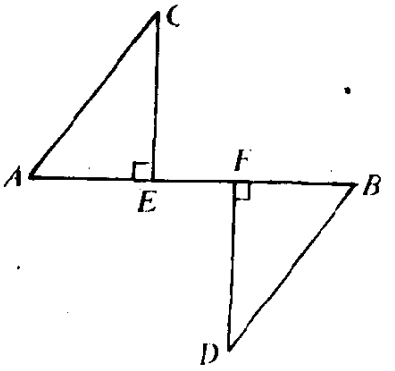
练　习

1. (1) 两条直角边对应相等的两个直角三角形是否全等？为什么？

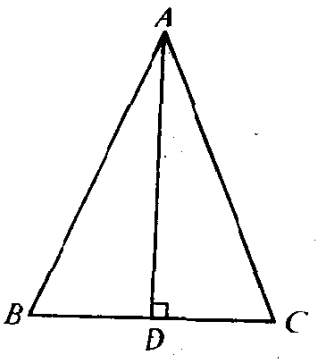
   (2) 一条边和一个锐角对应相等的两个直角三角形是否全等？为什么？

   (3) 判定两个直角三角形全等，我们学过几种方法？

2. 已知：如图，$CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别为 E、F. $AC \parallel DB$，且 $AC = BD$. 求证：$CE = DF$.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB = AC$，AD 是高.

   求证：(1) $BD = DC$;

   (2) $\angle BAD = \angle CAD$.

想一想

把例 1 中的直角换成一个钝角，用同样方法画三角形，你能得到什么结论？

3.9 角的平分线

我们知道，把一个角分成两个相等的角的射线叫做角的平分线．利用全等三角形，可以证明角的平分线的重要性质．

定理 1　在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等．

要证明这个定理，首先分清题设和结论．

题设：一个点在一个角的平分线上．

结论：它到角的两边的距离相等．

已知：OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 在 OC 上，$PD \perp OA, PE \perp OB$，垂足分别是 D、E（图 3－39）．

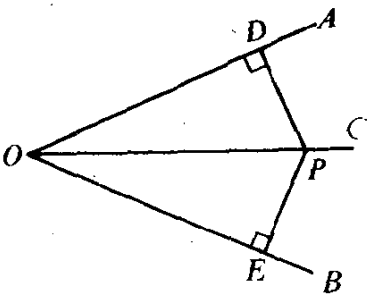


图　3－39

求证：$PD = PE$．

证明：∵　$PD \perp OA, PE \perp OB$（已知），

∴　$\angle PDO = \angle PEO = 90°$（垂直的定义）．

在△ PDO 和△ PEO 中，

$$\begin{cases} \angle PDO = \angle PEO & \text{（已证）}, \\ \angle AOC = \angle BOC & \text{（已知）}, \\ OP = OP & \text{（公共边）}, \end{cases}$$

∴　$\triangle PDO \cong \triangle PEO$ (AAS)．

∴　$PD = PE$（全等三角形的对应边相等）．

如果交换定理 1 的题设、结论，能够得到下面的命题，可以证明这个命题是真命题.

定理 2　到一个角的两边的距离相等的点，在这个角的平分线上.

已知：$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别是 D、E，$PD = PE$（图 3－40）.

求证：点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

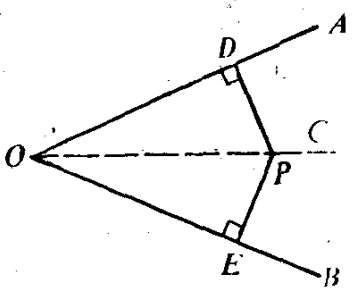


图　3－40

证明：经过点 P 作射线 OC.

$\because$ $PD \perp OA, PE \perp OB$（已知），

$\therefore$ $\angle PDO = \angle PEO = 90°$（垂直的定义）.

在 Rt$\triangle PDO$ 和 Rt$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases} OP = OP \text{（公共边）}, \\ PD = PE \text{（已知）}, \end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle PDO \cong$ Rt$\triangle PEO$（HL）.

$\therefore$ $\angle AOC = \angle BOC$（全等三角形的对应角相等）.

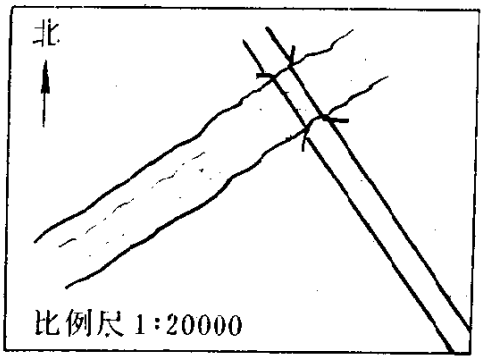
$\therefore$ OC 是 $\angle AOB$ 的平分线.

由定理 1、2 可知，在一个角内，到角的两边距离相等的点，都在这个角的平分线上；反过来，角的平分线上的点到角的两边距离都相等. 于是得到下面的结论：

角的平分线是到角的两边距离相等的所有点的集合.

练　习

如图，河南区一个工厂，在公路西侧，到公路的距离与到河岸的距离相等，并且与河上公路桥的距离为 300 米．在图上标出工厂的位置，并说明理由．



例　已知：如图 3－41，$\triangle ABC$ 的角平分线 BM、CN 相交于点 P．

求证：点 P 到三边 AB、BC、CA 的距离相等．

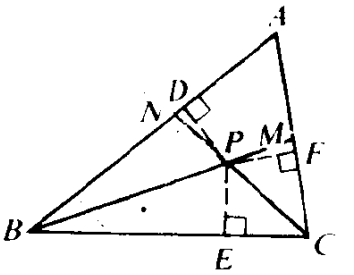


图　3－41

证明：过点 P 作 PD、PE、PF 分别垂直于 AB、BC、CA，垂足为 D、E、F．

∵　BM 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上(已知)，

∴　$PD=PE$(角平分线上的点到角的两边距离相等)．

同理　$PE=PF$．

∴　$PD=PE=PF$．

即点 P 到边 AB、BC、CA 的距离相等．

根据例题的结论，我们可以在三角形内找到一点，使它到三角形三边距离都相等．

在分析定理1、2的题设、结论时，我们看到，这两个命题的题设、结论正好相反.

在两个命题中，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个叫做**原命题**，那么另一个叫做它的**逆命题**.

如果一个定理的逆命题经过证明是真命题，那么它也是一个定理，这两个定理叫做**互逆定理**，其中一个叫做另一个的**逆定理**.

在几何里，有许多互逆的定理. 本节的定理1、2是互逆定理，“两直线平行，内错角相等”和“内错角相等，两直线平行”也是互逆的定理.

虽然每个命题都有逆命题，但要注意，因为一个真命题的逆命题不一定也是真命题，所以并不是所有的定理都有逆定理. 例如，“对顶角相等”的逆命题是假命题，所以“对顶角相等”这个定理没有逆定理.

练　习

1. 已知$\triangle ABC$. 在$\triangle ABC$内求一点P，使它到$\triangle ABC$的三边距离相等(画出图形，不写画法).
2. 说出下列命题的逆命题. 它们都是真命题吗?
   (1)两条直线平行，同位角相等;
   (2)如果两个角都是直角，那么它们相等;
   (3)全等三角形的对应角相等.

习 题 3.4

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 怎样判定两个直角三角形全等？

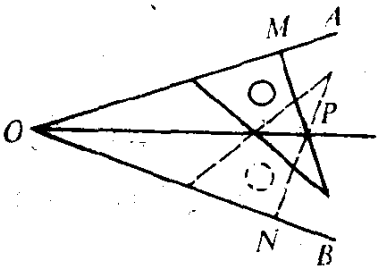
(2) 什么叫互逆命题？什么叫互逆定理？每个命题都有逆命题吗？每个定理都有逆定理吗？

(3) 角的平分线的性质定理及其逆定理的内容是什么？

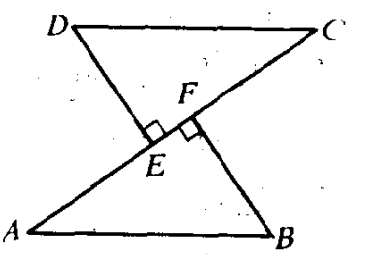
(4) 角的平分线是什么样的点的集合？

2. 画一个直角三角形，使它的一条直角边长 4 cm，斜边长 5 cm，再量出另一条直角边的长(精确到 0.1 cm)．

3. 用三角板可按下面方法画角平分线：在已知$\angle AOB$的两边上，分别取 $OM=ON$(如图)，再分别过点 M、N 作 OA、OB 的垂线，交点为 P，画射线 OP．证明 OP 平分$\angle AOB$．



(第 3 题)

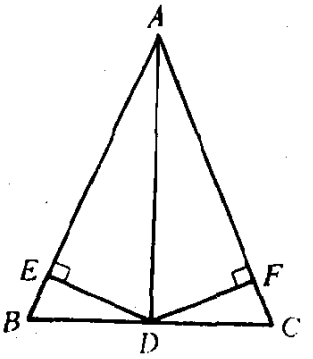


(第 4 题)

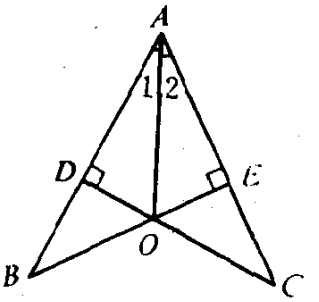
4. 已知：如图，$AB=CD$，$DE\perp AC$，$BF\perp AC$，E、F 是垂足，$DE=BF$．求证：(1) $AE=CF$；(2) $AB\parallel CD$．

5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，AD 是它的角平分线，且 $BD=CD$，DE、DF 分别垂直 AB、AC，垂足为 E、F．

求证：$EB=FC$．



(第5题)



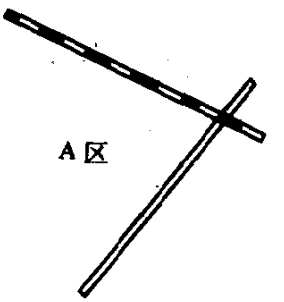
(第6题)

6. 已知：如图，$CD \perp AB$，$BE \perp AC$，垂足分别为 D、E，BE、CD 相交于点 O.

求证：(1)当$\angle 1 = \angle 2$时，$OB = OC$;

(2)当 $OB = OC$ 时，$\angle 1 = \angle 2$.

7. 如图，一目标在 A 区，到公路、铁路距离相等，离公路与铁路交叉处 500 米.在图上标出它的位置(比例尺 1 :20000).



(第7题)

8. 画一个等腰直角三角形，在它的斜边上求一点，使它到两条直角边的距离相等(不写画法).量一下，这点到直角边的距离与直角边长有什么关系？这一点与三个顶点的距离有什么关系？

9. 下列各命题都是真命题，写出它们的逆命题.这些逆命题是真命题吗？如果不是，举出一个反例:

(1)同旁内角互补，两直线平行;

(2)如果两个有理数相等，那么它们的绝对值相等;

(3)全等三角形的对应边相等.

三　尺规作图

3.10　基本作图

前面，我们学过用刻度尺、三角板、量角器和圆规等多种工具画几何图形．如果只用直尺(没有刻度)和圆规，也可以画出许多图形，有时还很方便．在几何里，把限定用直尺和圆规来画图，称为**尺规作图**．最基本、最常用的尺规作图，通常称**基本作图**．一些复杂的尺规作图，都是由基本作图组成的．第一册里曾讲过用尺规作一条线段等于已知线段，这是一种基本作图，下面再介绍几种基本作图．

I. 作一个角等于已知角．

已知：$\angle AOB$ (图 3－42)．

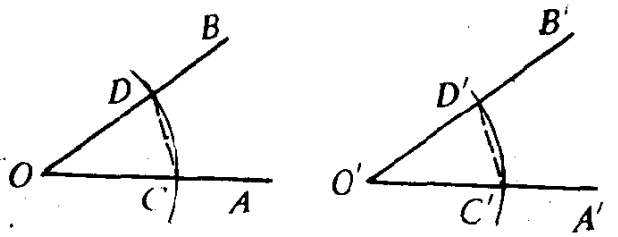


图　3－42

求作：$\angle A'O'B'$，使$\angle A'O'B' = \angle AOB$．

作法：1. 作射线 $O'A'$．

2. 以点 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA 于 C，交 OB 于 D．

3. 以点 O' 为圆心，以 OC 长为半径作弧，交 $O'A'$ 于 C'.

4. 以点 C' 为圆心，以 CD 长为半径作弧，交前弧于 D'.

5. 经过点 D' 作射线 $O'B'$. $\angle A'O'B'$ 就是所求的角.

证明：连结 CD、$C'D'$. 由作法可知

$\triangle C'O'D' \cong \triangle COD$ (SSS)，

$\therefore$ $\angle C'O'D' = \angle COD$（全等三角形的对应角相等），

即 $\angle A'O'B' = \angle AOB$.

II. 平分已知角.

已知：$\angle AOB$（图 3－43）.

求作：射线 OC，使 $\angle AOC = \angle BOC$.

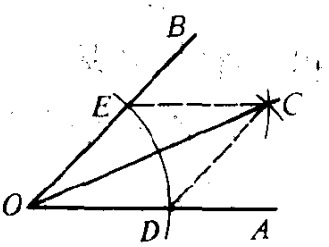


图 3－43

作法：1. 在 OA 和 OB 上，分别截取 OD、OE，使 $OD = OE$.

2. 分别以 D、E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，在 $\angle AOB$ 内，两弧交于点 C.

3. 作射线 OC.

OC 就是所求的射线.

证明：连结 CD、CE，由作法可知

$\triangle ODC \cong \triangle OEC$ (*SSS*),

∴ $\angle COD = \angle COE$ (全等三角形的对应角相等),

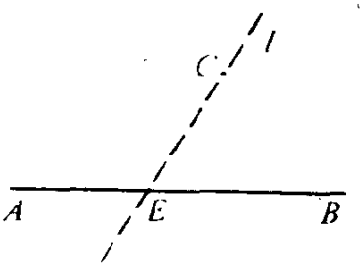
即 $\angle AOC = \angle BOC$.

练 习

1. 任意画一个钝角，作它的平分线. (画出图形，口述作法.)

2. 已知：直线 *AB* 及直线 *AB* 外一点 *C*.

求作：过点 *C* 作 *CD* // *AB*. (画出图形，不写作法.)



(第2题)

(提示：过点 *C* 任作一条直线 *l*，交 *AB* 于点 *E*. 在点 *C* 处作 $\angle CEB$ 的同位角(或内错角)，使它等于 $\angle CEB$.)

III. 经过一点作已知直线的垂线.

(1)经过已知直线上的一点作这条直线的垂线.

已知: 直线 AB 和 AB 上一点 C(图 3－44).

求作: AB 的垂线，使它经过点 C.

作法: 作平角 ACB 的平分线 CF.

直线 CF 就是所求的垂线.

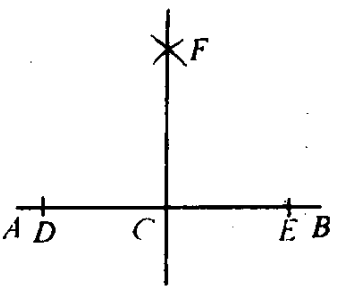


图 3－44

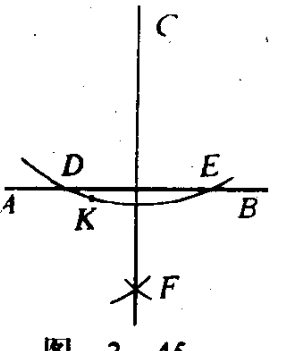


图 3－45

证明: 由作法可知,

$$\angle ACF=\angle BCF=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

$\because$ $\angle ACB=180°$(平角的定义),

$\therefore$ $\angle ACF=90°$,

即 CF 是 AB 的垂线.

(2)经过已知直线外一点作这条直线的垂线.

已知: 直线 AB 和 AB 外一点 C(图 3－45).

求作: AB 的垂线，使它经过点 C.

作法: 1. 任意取一点 K，使 K 和 C 在 AB 的两旁.

2. 以 C 为圆心，CK 长为半径作弧，交 AB 于点 D 和 E.

3. 分别以 D 和 E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧交于点 F.

4. 作直线 CF.

直线 CF 就是所求的垂线.

证明略.

IV. 作线段的垂直平分线.

垂直于一条线段并且平分这条线段的直线，叫做这条线段的**垂直平分线**，或**中垂线**.

已知：线段 AB(图 3－46).

求作：线段 AB 的垂直平分线.

作法：1. 分别以点 A 和 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 C 和 D.

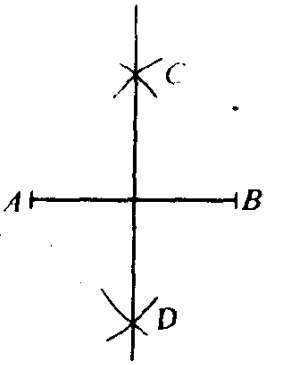


图 3－46

2. 作直线 CD.

直线 CD 就是线段 AB 的垂直平分线.

证明略.

因为直线 CD 与线段 AB 的交点，就是 AB 的中点，所以我们也用这种方法作线段的中点.

练 习

1. 作一个角的余角.

2. 用尺规把一条线段 4 等分.

3.11 作图题举例

例 1 已知两边及其夹角，求作三角形.

已知：$\angle\alpha$，线段 a、b（图 3－47）.

求作：$\triangle ABC$，使 $\angle A=\angle\alpha$，$AB=a$，$AC=b$.

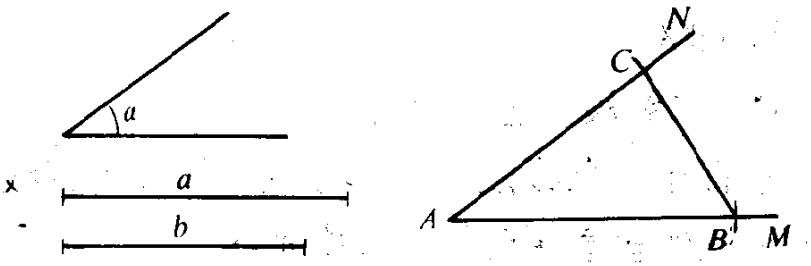


图 3－47

作法：1. 作 $\angle MAN=\angle\alpha$.

2. 在射线 AM、AN 上分别作线段 $AB=a$，$AC=b$.

3. 连结 BC.

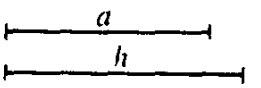
$\triangle ABC$ 为所求作的三角形.

一般几何作图题，应有下面几个步骤：已知、求作、作法、证明. 比较复杂的作图题，在作图之前可作分析，有时还要对作图的结果进行讨论. 目前，我们只要求写出已知、求作、作法三个步骤.

在几何作图题中，要反复应用上节学过的基本作图（包括作线段等于已知线段），作法中不需要重述基本作图过程. 如例 1 中需要先作一个角等于已知角，“作法”中只要写“作 $\angle MAN=\angle\alpha$”即可.

例 2 已知底边a，底边上的高h，求作等腰三角形.

已知：线段 a、h（图3－48）.



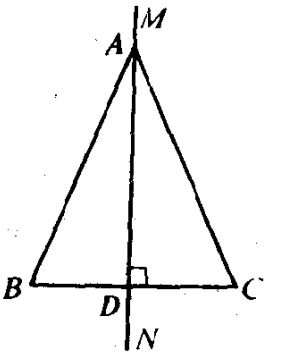


图 3－48

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

作法：1. 作线段 $BC=a$.

2. 作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 与 BC 交于点 D.

3. 在 MN 上截取 DA，使 $DA=h$.

4. 连结 AB、AC.

$\triangle ABC$ 为所求的等腰三角形.

证明：由作图可知，$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SAS).

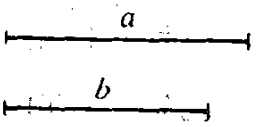
$\therefore$ $AB=AC$（全等三角形的对应边相等）.

又$\because$ $BC=a$，$AD \perp BC$，$AD=h$（作图），

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是所求作的等腰三角形.

练 习

1. 作一个直角三角形，使它的两条直角边分别等于线段 a、b.



（第1题）

2. 已知三边作三角形.

习 题 3.5

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

   (1) 尺规作图与其他画图的主要区别是什么？

   (2) 我们学过哪些基本作图？

   (3) 尺规作图题一般分哪几个步骤？

2. 已知：$\angle ABC$. 求作：$\angle A'B'C'$，使 $\angle A'B'C' = \angle ABC$.

3. 已知：$\angle BAC$. 求作：射线 AP，使 $\angle BAP = \angle PAC$.

4. 任意画一个三角形，然后用尺规作它的三个内角的和. 检查一下你的作图是不是准确(不写已知、求作、作法).

5. 已知：直线 MN 和点 P. 求作：直线 PQ，使 $PQ \perp MN$.

6. 已知：线段 EF. 求作：直线 AB，使 AB 垂直平分 EF.

7. 画三个任意三角形，在第一个三角形中作出它的三条角平分线，在第二个三角形中作出它的三条高，在第三个三角形中作出它的三条边的垂直平分线. 观察所画的图形，你能发现什么？(不写已知、求作、作法)

8. 作一个已知角的余角的一半.

9. 已知两角及夹边作三角形.

10. 已知斜边、一直角边作直角三角形.

11. 已知一腰和底边长，求作等腰三角形.

12. 已知一直角边和与它相邻的一个锐角，求作直角三角形.

三等分角

读一读

我们学过用尺规平分一个角，从而可以把一个角4等分、8等分、16等分、……．你能用尺规三等分一个任意角吗?

你一定觉得这个问题很简单，实际上，为解决这个问题，两千多年来数学家们付出了大量心血，直到1882年，才通过其他数学方法证明，这是一个作图不能问题.

所谓“作图不能问题”，是说有限次地使用直尺、圆规不能作出的作图问题，而直尺、圆规的用法也有规定：直尺只能用来在平面上画过两点的直线，圆规只能用来画给定圆心、半径的圆．历史上有许多人声称他们解决了三等分角的问题，实际上他们都是没有严格按上述要求完成的.

用尺规三等分任意角是不可能的，但是，对于特殊角，我们可以根据几何中的有关定理，用尺规把它们三等分．例如，学过有关等腰三角形和直角三角形的知识后，我们就会用尺规三等分平角、三等分直角.

四　等腰三角形

3.12　等腰三角形的性质

等腰三角形是一种特殊的三角形，它除具有一般三角形的性质外，还有一些特殊性质.

在小学里，我们曾把等腰三角形的两腰叠在一起，发现它的两个底角互相重合，这说明等腰三角形的两个底角相等. 下面我们来证明这个性质.

等腰三角形的性质定理　等腰三角形的两个底角相等(简写成“**等边对等角**”).

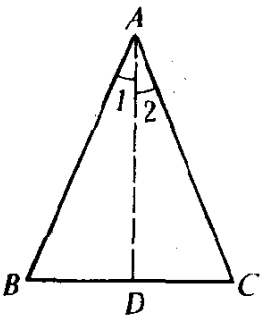


图　3－49

已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$ (图 3－49).

求证：$\angle B=\angle C$.

证明：作顶角的平分线 AD.

在$\triangle BAD$ 和$\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC\ (\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2\ (\text{辅助线作法}), \\ AD=AD\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle BAD\cong\triangle CAD\ (SAS)$.

$\therefore\ \angle B=\angle C$ (全等三角形的对应角相等).

从上面的证明过程中，可以知道

$$BD=CD,\ \angle ADB=\angle ADC=90^\circ,$$

所以 AD 平分 BC，并且 $AD\perp BC$. 即

推论 1　等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边.

从推论 1 可以知道,**等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.**

推论 2　等边三角形的各角都相等，并且每一个角都等于60°.

例1　已知：如图3－50．房屋的顶角$\angle BAC=100°$,过屋顶 A 的立柱 $AD\perp BC$,屋椽 $AB=AC$.求顶架上$\angle B$、$\angle C$、$\angle BAD$、$\angle CAD$ 的度数.

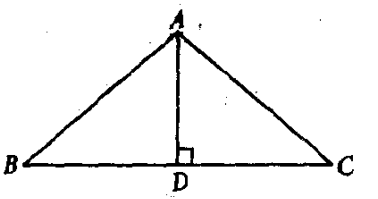


图　3－50

解：在$\triangle ABC$ 中,

$\because$　$AB=AC$ (已知),

$\therefore$　$\angle B=\angle C$ (等边对等角).

$\therefore$　$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=40°$(三角形内角和定理).

又$\because$　$AD\perp BC$ (已知),

$\therefore$　$\angle BAD=\angle CAD$ (等腰三角形顶角的平分线与底边上的高互相重合).

$\therefore$　$\angle BAD=\angle CAD=50°$.

练　习

1.（口答）(1)怎样从等腰三角形的性质定理得出推论：等腰直角三角形的每一个锐角都等于45°?

(2)如果等腰三角形的一个底角等于75°，那么它的顶角等于多少度？

(3)等腰直角三角形斜边上的高把直角分成两个角，求这两个角的度数.

2. 填空：根据等腰三角形性质定理的推论，在△ABC中，$AB=AC$时，

(1)∵ $AD\perp BC$，∴ ∠____ = ∠____，____ = ____；

(2)∵ AD是中线，∴ ____⊥____，∠____ = ∠____；

(3)∵ AD是角平分线，∴____⊥____，____ = ____.

3. 已知△ABC是等边三角形，AD是高，画出图形，说出图中∠BAC，∠BAD、∠B、∠C的度数.

想一想

在证明等腰三角形性质定理时，我们作的辅助线是顶角的平分线. 想一想，作底边上的高可以吗？如果可以的话，怎样证明？还可以作什么样的辅助线？

例2 已知：如图3－51. 在△ABC中，$AB=AC$，点D在AC上，且$BD=BC=AD$.

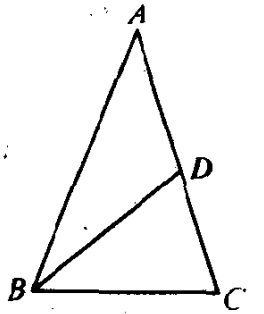


图 3－51

求△ABC各角的度数.

解：∵ $AB=AC$，$BD=BC=AD$（已知），

∴ $\angle ABC=\angle C=\angle BDC$，$\angle A=\angle ABD$（等边对等角）.

设$\angle A=x°$，则

$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=2x°$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和）.

又∵ $\angle ABC=\angle C=\angle BDC=2x°$，于是有

$x+2x+2x=180$（三角形内角和定理）.

解得 $x=36$.

所以$\triangle ABC$中，$\angle A=36°$，$\angle ABC=\angle C=72°$.

例3 已知：如图3－52，点D、E在$\triangle ABC$的边BC上，$AB=AC$，$AD=AE$.

求证：$BD=CE$.

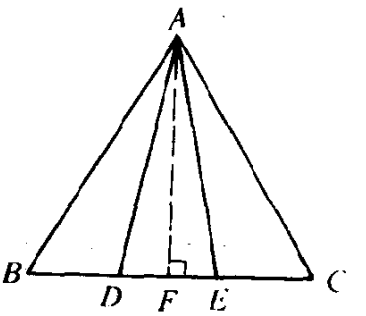


图 3－52

分析：因为$\triangle ABC$和$\triangle ADE$是有公共顶点，并且底边在同一直线上的等腰三角形，所以作$\triangle ABC$（或$\triangle ADE$）的高AF，可同时平分BC、DE.

证明：作$AF\perp BC$，垂足为F，则$AF\perp DE$.

∵ $AB=AC$，$AD=AE$（已知），

$AF\perp BC$，$AF\perp DE$（辅助线作法），

∴ $BF=CF$，$DF=EF$（等腰三角形底边上的高与底边上的中线互相重合）.

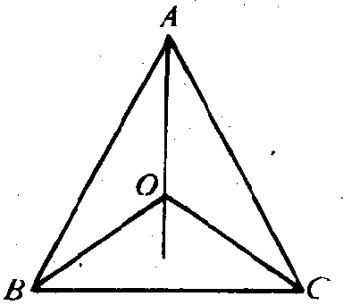
∴ $BD=CE$.

练 习

1. $\triangle ABC$ 是等边三角形，中线 BD、CE 相交于点 O. 求以点 O 为顶点的 4 个角的度数.

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $OB=OC$.

求证：$AO \perp BC$.



(第 2 题)

3. 利用证明三角形全等的方法，证明例 3.

例 4 求证：等腰三角形两底角的平分线相等.

这是一个证明文字叙述的几何命题的题目. 做这类题，首先要分清题设、结论，画出草图，结合图形写出已知、求证，然后再证明.

已知：如图 3－53，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

求证：$BD=CE$.

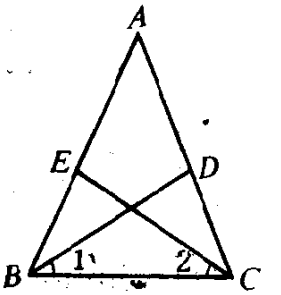


图 3－53

证明：$\because$ $AB=AC$ (已知)，

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ACB$ (等边对等角).

又 $\because$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$ (已知)，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle ABC \text{ (已证)}, \\ BC = CB \text{ (公共边)}, \\ \angle 1 = \angle 2 \text{ (已证)}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BDC \cong \triangle CEB$ (ASA).

$\therefore$ $BD = CE$ (全等三角形的对应边相等).

例 5 求证：等腰三角形底边中点到两腰的距离相等.

已知：如图 3－54，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$DB = DC$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足为 E、F.

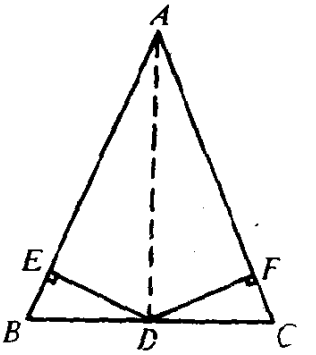


图 3－54

求证：$DE = DF$.

证明：连结 AD.

$\because$ $AB = AC$, $DB = DC$ (已知),

$\therefore$ AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线(等腰三角形底边上的中线与顶角平分线互相重合).

又 $\because$ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ (已知),

$\therefore$ $DE = DF$ (角平分线上的点到角的两边距离相等).

练　习

求证：等腰三角形底边上的高上的任意一点，到两腰的距离相等.

习 题 3.6

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)等腰三角形具备一般三角形的性质吗？它的边之间有什么关系？它的内角和是多少？

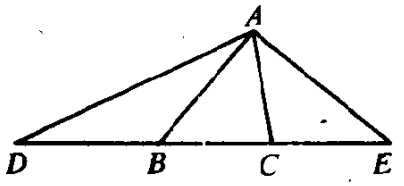
(2)等腰三角形有哪些特殊性质？

(3)等边三角形的每条角平分线，都是它的高、中线吗？为什么？

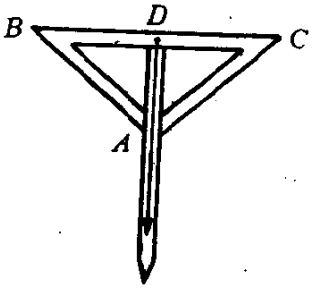
2. (1)等腰三角形的一个角是110°，它的另外两个角是多少度？

(2)等腰三角形的一个角是80°，它的另外两个角是几度？

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=80°$. 延长 CB 至 D，使 $BD=BA$，延长 BC 至 E，使 $CE=CA$. 连结 AD、AE. 求 $\angle D$、$\angle E$、$\angle DAE$ 的度数.



(第3题)



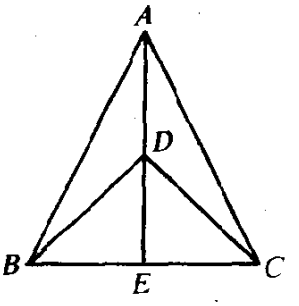
(第4题)

4. 如图的三角测平架中，$AB=AC$，在 BC 的中点 D 挂一个重锤，自然下垂. 调整架身，使点 A 恰好在重锤线上.

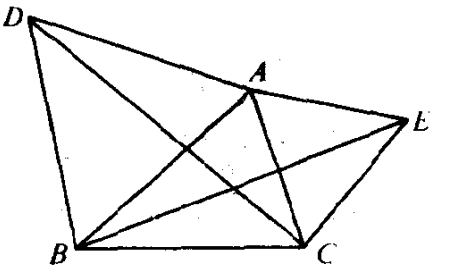
(1)求证：$AD\perp BC$；(2)这时 BC 处于水平位置，为什么？

5. 已知等腰三角形的一个底角等于顶角的4倍，求这个等腰三角形各角的度数.

6. 已知:如图，$AB=AC$，$DB=DC$，AD的延长线交BC于点E. 求证：$BE=EC$.



(第6题)



(第7题)

7. 已知：如图，$\triangle ABD$、$\triangle AEC$都是等边三角形.
求证：$BE=DC$.

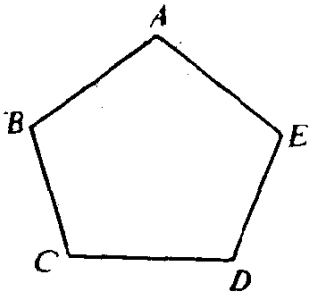
8. 求证：等腰三角形两腰上的中线相等.

9. 求证：等腰三角形两腰上的高相等.

B 组

1. 已知：如图，$AB=AE$, $BC=ED$，
$\angle B=\angle E$.
求证：$\angle C=\angle D$.

2. 用尺规三等分一个平角.（提示：先作一个等边三角形，然后延长三角形的一边得平角.）



(第1题)

3.13 等腰三角形的判定

在3.12节中已经证明了，一个三角形中，等边对的角相等.反过来，等角对的边也相等吗？我们知道，真命题的逆命题不一定是真命题，它的真实性需要证明.下面我们来证明等腰三角形性质定理的逆定理.

等腰三角形的判定定理　如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等(简写成“等角对等边”).

已知:△ ABC 中，$\angle B=\angle C$ (图3－55).

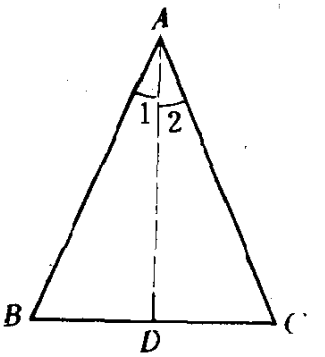


图　3－55

求证:$AB=AC$.

证明:作$\angle BAC$的平分线 AD.

在△ BAD 和△ CAD 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\ (\text{辅助线作法}),\\ \angle B=\angle C\ (\text{已知}),\\ AD=AD\ (\text{公共边}),\end{cases}$$

∴　△ $BAD\cong$△ CAD (AAS).

∴　$AB=AC$ (全等三角形的对应边相等).

推论1　三个角都相等的三角形是等边三角形.

推论2　有一个角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

例 1 求证：如果三角形一个外角的平分线平行于三角形的一边，那么这个三角形是等腰三角形.

已知：$\angle CAE$ 是$\triangle ABC$ 的外角，$\angle 1=\angle 2$，$AD\parallel BC$ (图3－56).

求证：$AB=AC$.

分析：要证明$AB=AC$，可先证明$\angle B=\angle C$. 因为已知$\angle 1=\angle 2$，所以可以设法找出$\angle B$、$\angle C$ 与$\angle 1$、$\angle 2$的关系.

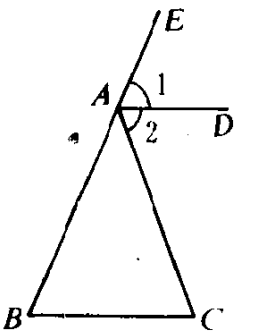


图 3－56

证明：∵ $AD\parallel BC$ (已知)，

∴ $\angle 1=\angle B$ (两直线平行，同位角相等)，

$\angle 2=\angle C$ (两直线平行，内错角相等).

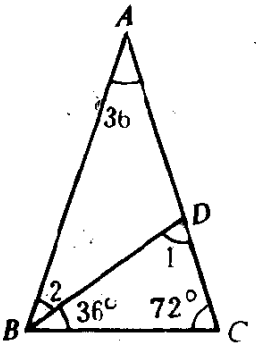
∵ $\angle 1=\angle 2$ (已知)，

∴ $\angle B=\angle C$.

∴ $AB=AC$ (等角对等边).

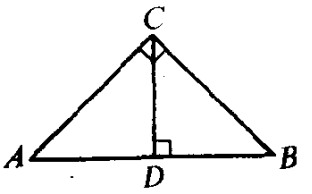
练 习

1. 如图，已知$\angle A=36°$，$\angle DBC=36°$，$\angle C=72°$. 计算$\angle 1$和$\angle 2$的度数，并说明图中有哪些等腰三角形.

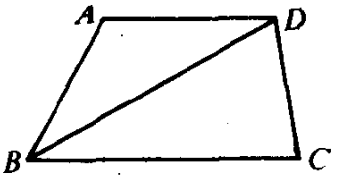


(第 1 题)

2. 如图，CD 是等腰直角三角形 ABC 斜边上的高．找出图中有哪些等腰直角三角形．



(第2题)



(第3题)

3. 已知：如图，$AD \parallel BC$，BD 平分 $\angle ABC$．

求证：$AB=AD$．

例2 上午8时，一条船从 A 处出发以15海里每小时的速度向正北航行，10时到达 B 处．从 A、B 望灯塔 C，测得 $\angle NAC=42°$，$\angle NBC=84°$．求从 B 处到灯塔 C 的距离(图3－57)．

解：$\because \angle NBC=\angle A+\angle C$ (三角形的一个外角等于不相邻的两个内角的和)，

$\therefore \angle C=84°-42°=42°$．

$\therefore BA=BC$ (等角对等边)．

$\because AB=15\times(10-8)=30$，

$\therefore BC=30$ (海里)．

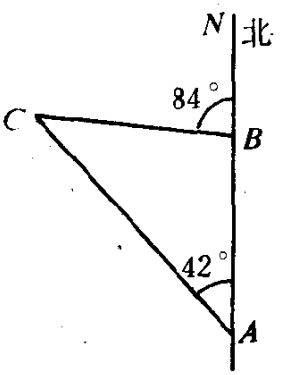


图 3－57

答：B 到灯塔 C 的距离是30海里．

如图 3－58，在△ABC 中，如果 $AC \perp BC$，$\angle A = 30°$，那么 $\angle B = 60°$. 延长 BC 到 D，使 $BD = AB$，连结 AD. 由推论 2 可知，△ABD 是等边三角形，并且，由 $AC \perp BC$ 可得 $BC = CD = \frac{1}{2} AB$. 于是得下面推论.

推论 3　在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

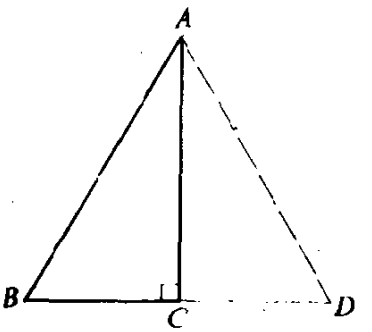


图　3－58

例 3　图3－59 是屋架设计图的一部分，其中 $BC \perp AC$，$DE \perp AC$，点 D 是 AB 的中点，$\angle A = 30°$，$AB = 7.4$ m，求 BC、DE 的长.

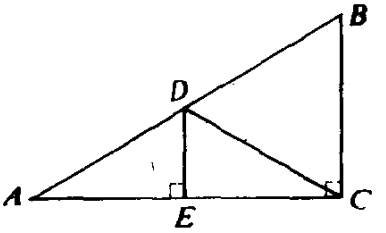


图　3－59

解：∵ $DE \perp AC$，$BC \perp AC$，$\angle A = 30°$（已知），

∴ $BC = \frac{1}{2} AB$，$DE = \frac{1}{2} AD$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

∴ $BC = \frac{1}{2} \times 7.4 = 3.7\,(\text{m})$.

又∵ $AD = \frac{1}{2} AB$，

∴ $DE = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 7.4$

$= 1.85\,(\text{m})$.

答：BC 的长是 3.7 m，DE 的长是 1.85 m.

练　习

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，如果 $\angle B = 2\angle A$，那么 $\angle B$ 和 $\angle A$ 各是多少度？边 AB 与 BC 之间有什么关系？

2. 等腰三角形的底角等于 15°，腰长为 $2a$，求腰上的高.

例 4 求证：等腰三角形两底角的平分线的交点到底边的两端点距离相等.

已知：如图 3－60，在△ABC 中，$AB=AC$，BD、CE 是两条角平分线，并且 BD、CE 相交于点 O.

求证：$OB=OC$.

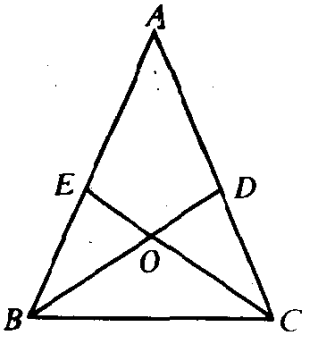


图 3－60

证明：∵ $AB=AC$（已知），

∴ $\angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

又∵ $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle OCB=\frac{1}{2}\angle ACB$（已知），

∴ $\angle OBC=\angle OCB$.

∴ $OB=OC$（等角对等边）.

例 5 已知：如图3－61，△ABC 是等边三角形，$DE\parallel BC$，交 AB、AC 于 D、E.

求证：△ADE 是等边三角形.

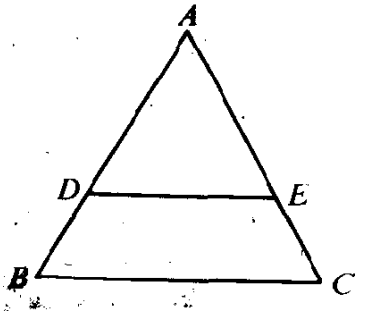


图 3－61

证明：∵ △ABC 是等边三角形(已知)，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C$（等边三角形各角相等）.

∵ $DE\parallel BC$（已知），

∴ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$（两直线平行，同位角相等）.

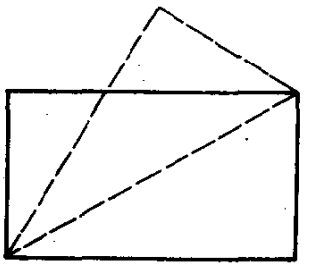
∴ $\angle A = \angle ADE = \angle AED$.

∴ $\triangle ADE$ 是等边三角形(三个角都相等的三角形是等边三角形).

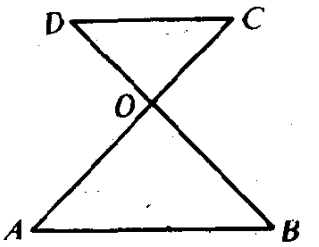
想一想，本题还有其他证法吗?

练 习

1. 把一张对边平行的纸条，像图那样折叠，重合部分是一个等腰三角形. 试说明理由.



(第1题)

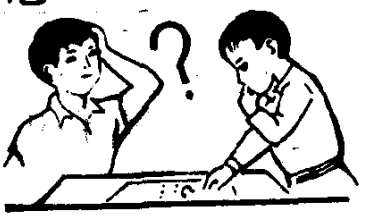


(第2题)

2. 已知: AC 和 BD 相交于点 O, $AB \parallel DC$, $OA = OB$.

求证: $OC = OD$.

想一想



等边三角形三条中线相交于一点. 画出图形，找出图中所有的全等三角形，并说明为什么是全等的.

三角形中边与角之间的不等关系

读一读

在一个三角形中，等边所对的角相等，反过来，等角所对的边也相等，那么不相等的边(或角)所对的角(或边)的大小关系怎样呢？下面我们来讨论这个问题.

如图 1，在△ ABC 中，如果 $AB>AC$，那么我们可以在 AB 上截取 AD，使 $AD=AC$，连结 CD，则 $\angle ACD=\angle ADC$.

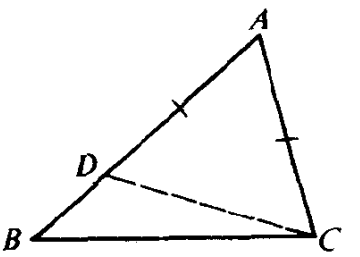


图 1

$\because\ \angle ACB>\angle ACD$，

$\therefore\ \angle ACB>\angle ADC$，

$\because\ \angle ADC>\angle B$，

$\therefore\ \angle ACB>\angle B$.

这说明，在一个三角形中，如果两条边不等，那么它们所对的角也不等，大边所对的角较大.

从上面讨论过程可以看到，研究边与角之间的不等的问题，可以通过辅助线，把它转化为相等的问题. 这是几何中研究不等问题时常用的方法.

下面，运用这种方法证明：在一个三角形中，如果两个角不等，那么它们所对的边也不等，大角所对的边较大.

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB > \angle B$（图 2）.

求证：$AB > AC$.

证明：在较大的 $\angle ACB$ 内作 $\angle BCD = \angle B$，CD 交 AB 于点 D，

则　$BD = DC$.

在 $\triangle ADC$ 中，

$\because$　$AD + DC > AC$，

$\therefore$　$AD + BD > AC$，

即　$AB > AC$.

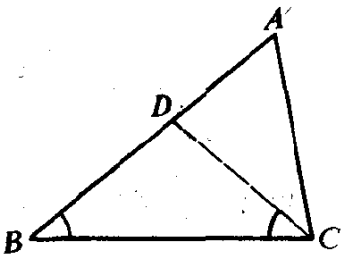


图 2

利用上面证过的两个结论，请回答下面的问题.

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC > AB > AC$，那么 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 有怎样的大小关系？

2. 如果一个三角形中最大的边所对的角是锐角，那么这个三角形一定是锐角三角形吗？为什么？

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 70°$，$\angle B = 50°$，那么 AB、BC、CA 之间有怎样的大小关系？

4. 直角三角形的哪一条边最长？为什么？

习 题 3.7

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 怎样判定一个三角形是等腰三角形？

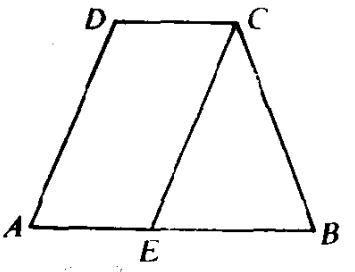
(2) 怎样判定一个三角形是等边三角形？

(3) 等腰三角形的判定定理与性质定理之间有什么关系？

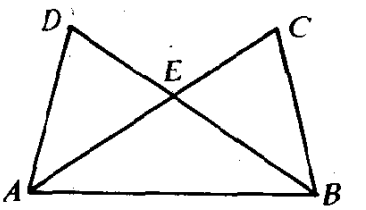
(4) 在直角三角形中，30° 角所对的边与斜边之间有什么关系？

2. 已知：如图，$\angle A = \angle B$，$CE \parallel DA$，CE 交 AB 于 E.

求证：$CE = CB$.



(第 2 题)



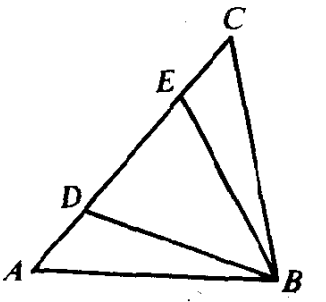
(第 3 题)

3. 已知：如图，$AD = BC$，$AC = BD$. 求证：$AE = EB$.

4. 求证：有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

5. 已知：如图，点 D、E 在 AC 上，$\angle ABD = \angle CBE$，$\angle A = \angle C$.

求证：$BD = BE$.

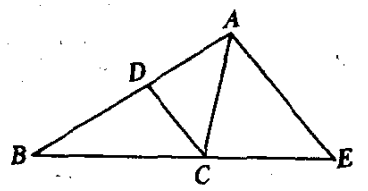


(第 5 题)

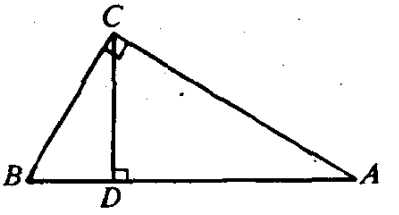
6. 求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形.

7. 已知：如图，CD 平分$\angle ACB$，$AE \parallel DC$，交 BC 的延长线于点 E.

求证：$\triangle ACE$ 是等腰三角形.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是高，$\angle A=30°$.

求证：$BD=\frac{1}{4}AB$.

9. 已知直角三角形的一个锐角等于另一个锐角的 2 倍，这个角的平分线把对边分成两条线段.

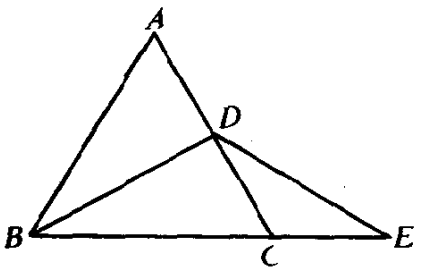
求证：其中一条是另一条的 2 倍.

B 组

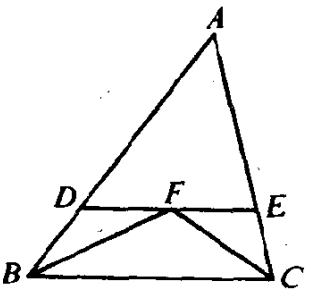
1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是中线. 延长 BC 到 E，使 $CE=CD$.

求证：$DB=DE$.

如果把 BD 改为$\triangle ABC$的角平分线或高，能否得出同样结论?



(第1题)



(第2题)

2. 已知: 如图，$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线相交于点F. 过 F 作 $DE \parallel BC$，交 AB 于 D，交 AC 于E.

求证: $BD+EC=DE$.

3.14 线段的垂直平分线

我们知道，垂直且平分一条线段的直线是这条线段的垂直平分线，下面研究它的性质.

定理　线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等.

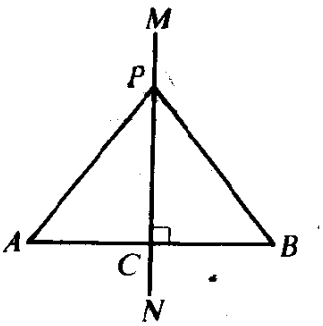


图　3－62

已知：如图 3－62，直线 $MN \perp AB$，垂足是 C，且 $AC=CB$. 点 P 在 MN 上.

求证：$PA=PB$.

证明：∵ $MN \perp AB$（已知），

∴ $\angle PCA=\angle PCB$（垂直的定义）.

在△ PCA 和△PCB 中，

$$\begin{cases} AC=CB\ (\text{已知}), \\ \angle PCA=\angle PCB\ (\text{已证}), \\ PC=PC\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ $\triangle PCA \cong \triangle PCB\ (SAS)$.

∴ $PA=PB$（全等三角形的对应边相等）.

反过来，在图 3－62 中，如果题设是 $PA=PB$，那么△PAB 是等腰三角形. 过点 P 作 $PC \perp AB$，垂足为 C，由等腰三角形性质可知，$AC=CB$，即 PC 是线段 AB 的垂直平分线. 于是可得上述定理的逆定理：

逆定理　和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

根据上述定理和逆定理可以知道，在 AB 的垂直平分线 MN 上的点和两点 A、B 的距离都相等；反过来，和两点 A、B 的距离相等的点都在 MN 上，所以直线 MN 可以看作是和两点 A、B 的距离相等的所有点的集合.

线段的垂直平分线可以看作是和线段两个端点距离相等的所有点的集合.

例 已知：如图 3－63，$\triangle ABC$ 中，边 AB、BC 的垂直平分线相交于点 P.

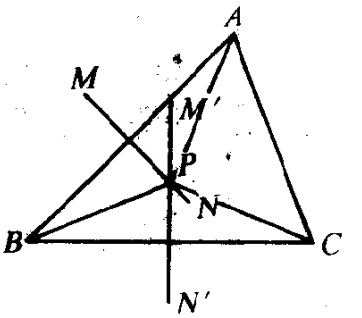


图 3－63

求证：$PA=PB=PC$.

证明：∵ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上(已知)，

∴ $PA=PB$ (线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点距离相等).

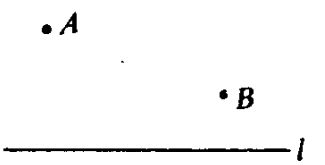
同理 $PB=PC$.

∴ $PA=PB=PC$.

练 习

1. 求一点 P，使它和 $\triangle ABC$ 三个顶点距离相等.

2. 如图，在直线 l 上求作一点 P，使 $PA=PB$.



(第2题)

3.15 轴对称和轴对称图形

我们知道，一个等腰三角形沿着它的底边上的高对折，高的两边的图形完全重合．在图 3－64、3－65 中，把轴线一旁的图形沿轴折叠，它与轴线另一旁的图形也能够重合．

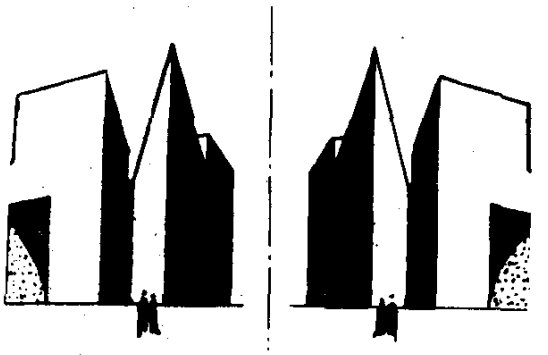


图 3－64

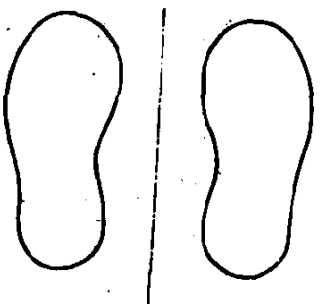


图 3－65

把一个图形沿着某一条直线折叠，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这条直线对称**，两个图形中的对应点叫做关于这条直线的**对称点**，这条直线叫做**对称轴**．两个图形关于直线对称也称**轴对称**．

例如，图 3－66 中，如果 $\triangle ABC$ 沿直线 MN 折叠后，与 $\triangle A'B'C'$ 完全重合，那么就说 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 MN 对称．

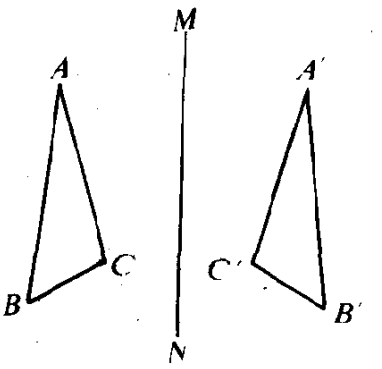


图 3－66

直线 MN 是对称轴，点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C' 是关于直线 MN 的对称点.

从定义可知，轴对称是指两个图形之间的形状与位置关系.具有这样特殊形状与位置关系的两个图形有一些特殊性质.

由轴对称的定义可以直接得到：

定理 1　关于某条直线对称的两个图形是全等形.

如图 3－67 中，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于 MN 对称.则 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，于是有 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC=B'C'$.

在图 3－67 中，如果 A、A' 是对称点，连结 AA'，交 MN 于 P，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 沿 MN 折叠后，点 A 与 A' 重合. 于是有

$AP=PA'$，

$\angle MPA=\angle MPA'=90°$.

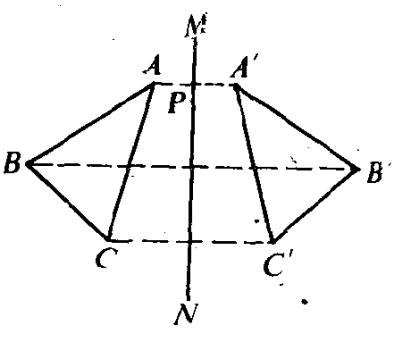


图　3－67

也就是 MN 垂直平分 AA'. 于是得到另一个性质：

定理 2　如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是对应点连线的垂直平分线.

在图 3－67 中，把两个图形沿对称轴 MN 对折后，直线 AB 和 $A'B'$ 能够重合.如果直线 AB 与 MN 相交，那么 $A'B'$ 也与 MN 相交于同一点.因此又得到：

定理 3　两个图形关于某直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上.

从图形中可以看出，定理 2 的逆命题也是成立的：

逆定理　如果两个图形的对应点连线被同一条直线垂直平分，那么这两个图形关于这条直线对称.

可以用这个定理来判定两个图形关于某直线对称.

例 1　已知：如图3－68，直线 l 及直线外一点 P.

求作：点 P'，使它与点 P 关于直线 l 对称.

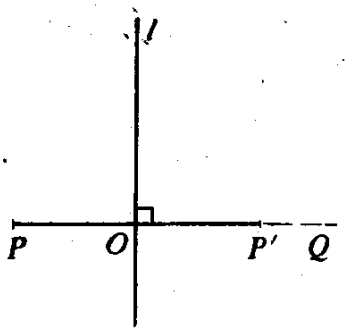


图　3－68

作法：1. 过点 P 作 $PQ \perp l$，交 l 于点 O.

2. 在直线 PQ 上，取 $OP' = OP$.

点 P' 为所求作的点.

练　习

1. 举出一些成轴对称的图形的实例.
2. 在例 1 中，如果点 P 在 l 上，点 P 关于直线 l 的对称点在什么地方？
3. 已知：如图，两点 A、B. 求作：直线 l，使 A、B 关于 l 对称.

（第 3 题）

4. 已知 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 一定关于某直线对称吗？如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，那么它们全等吗？为什么？

例 2 已知：$\triangle ABC$ 和过点 A 的直线 MN（图 3－69）.

求作：$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 关于 MN 对称.

作法：1. 作 $BD \perp MN$，垂足是 D. 延长 BD 到 B'，使 $DB' = BD$，得到点 B 的对称点B'.

2. 同法作点 C 的对称点C'.

3. 因为点 A 在对称轴 MN 上，所以点 A 的对称点 A'与 A 重合.

4. 连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形.

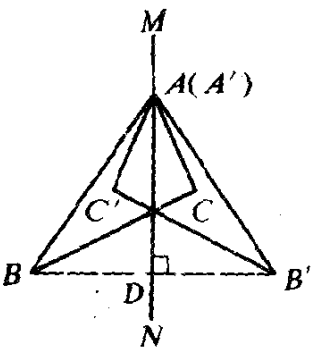


图 3－69

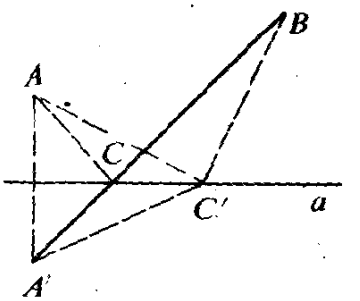


图 3－70

下面，我们来做几何第一册中引言的问题 4.

例 3 如图3－70，要在河边修建一个水泵站，分别向张村、李庄送水. 修在河边什么地方，可使所用的水管最短?

已知：直线 a 和a 的同侧两点A、B（图3－70）.

求作：点 C，使 C 在直线a 上，并且 $AC+CB$ 最小.

作法：1. 作点 A 关于直线 a 的对称点 A'.

2. 连结 $A'B$ 交 a 于点 C.

点 C 就是所求的点.

证明：在直线 a 上另取一点 C'，连结 AC、AC'、$A'C'$、$C'B$.

因为直线 a 是点 A、A' 的对称轴，点 C、C' 在对称轴上，

$\therefore\quad AC=A'C,\ AC'=A'C'$,

$\therefore\quad AC+CB=A'C+CB=A'B$.

在 $\triangle A'C'B$ 中，

$\because\quad A'B<A'C'+C'B$,

$\therefore\quad AC+CB<AC'+C'B$,

即 $AC+CB$ 最小.

练　习

1. 任画一个三角形和一条直线，作出这个三角形关于这条直线对称的三角形.
2. 已知 $\triangle ABC$，以 BC 所在的直线为对称轴，作一个三角形与它对称.
3. 任画一条直线 PQ，及 PQ 同旁两点 M、N. 画出从点 M 出发经过 PQ 上的某一点后，再到达点 N 的最短路线.

如果一个图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做**轴对称图形**，这条直线就是它的对称轴.

如图 3－71，等腰三角形沿它的底边的垂直平分线折叠，两旁的部分互相重合，等腰三角形是一个轴对称图形，底边的垂直平分线是它的对称轴. 日常生活中，可以见到的轴对称图形很多，图 3－72 中的图形，都是轴对称图形.

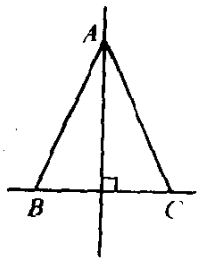


图 3－71

图 3－72

轴对称图形是一个具有特殊形状的图形. 如果把一个轴对称图形沿对称轴分成两个图形，那么这两个图形就是关于这条轴对称的. 因此，由轴对称的性质可以知道轴对称图形的性质.

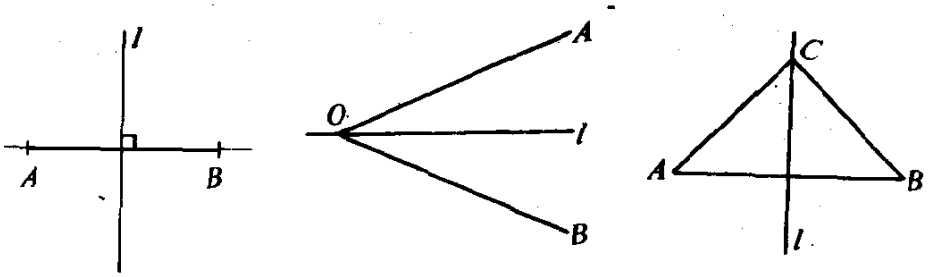
例 4 下列图形中，哪些是轴对称图形？是轴对称图形的，作出对称轴：

(1) 线段；　　(2) 角；

(3) 任意三角形；　　(4) 等腰直角三角形.

答：线段、角、等腰直角三角形是轴对称图形.

线段的对称轴是线段 AB 所在直线和它的垂直平分线(图 3－73(1))；角的对称轴是角平分线所在的直线(图 3－73(2))；等腰直角三角形的对称轴是底边的垂直平分线(图 3－73(3)).



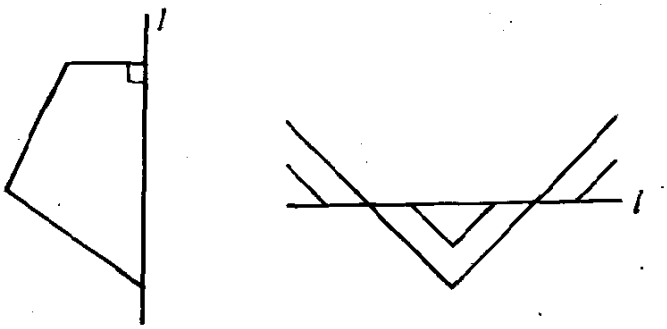
(1)　　(2)　　(3)

图　3－73

练　习

1. 把一张纸对折，任意剪成一个形状，把它打开后，所得到的是一个轴对称图形吗？为什么？

2. 把下列各图形补成以 l 为对称轴的轴对称图形.



(第 2 题)

习 题 3.8

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)什么叫线段的垂直平分线？它有什么性质？

(2)线段垂直平分线性质定理的逆定理是什么？

(3)和线段两端点距离相等的点的集合是什么？

(4)什么样的两个图形叫做关于某条直线对称？什么叫做对称点、对称轴？

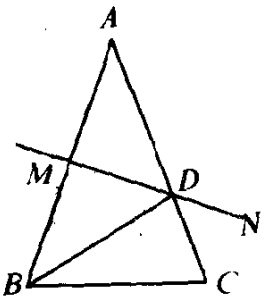
(5)成轴对称的两个图形有什么性质？

(6)除定义外，有什么方法可以判定两个图形成轴对称？

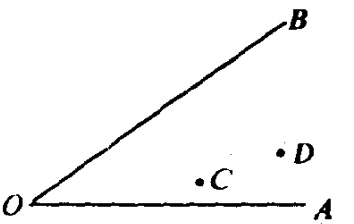
(7)什么样的图形叫做轴对称图形？

2. 已知：MN 是线段 AB 的垂直平分线，C、D 是 MN 上两点，求证：(1)$\triangle ABC$、$\triangle ABD$ 是等腰三角形；(2)$\angle CAD = \angle CBD$.

3. 已知：如图，$AB=AC$，$\angle A=40°$，AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D. 求 $\angle DBC$ 的度数.



(第3题)

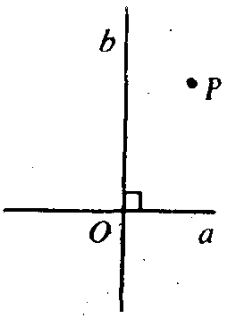


(第4题)

4. 如图，求作一点 P，使 $PC=PD$，并且使点 P 到 $\angle AOB$ 的两

边的距离相等.

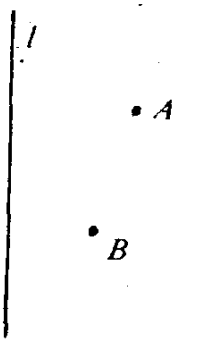
5. 如图,$a \perp b$,a、b 相交于点 O. 点 P 为 a、b 外一点. 求作: 点 P 关于 a、b 的对称点,并证明这两点与点 O 的距离相等.



(第 5 题)

6. 已知: 对称轴 MN 和线段 AB,
(1) A 和 B 在 MN 的同旁;
(2) A 和 B 在 MN 的两旁;
(3) A 在 MN 上,B 不在 MN 上.
求作: AB 的对称线段 $A'B'$.

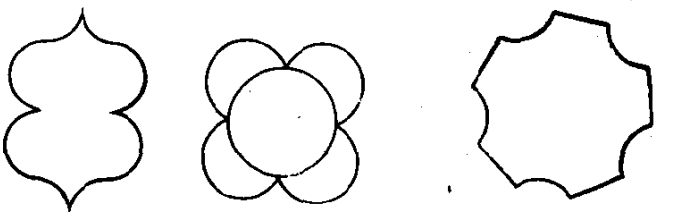
7. 草原上两个居民点 A、B 在河流 l 的同旁(如图). 一汽车从 A 出发到 B,途中需要到河边加水. 汽车在哪一点加水,可使行驶的路程最短? 在图上画出该点.



(第 7 题)

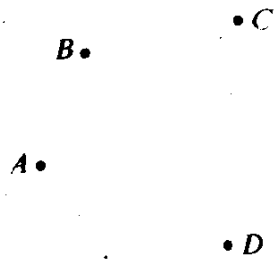
8. 等边三角形是轴对称图形吗? 为什么? 如果是的话,画出它的对称轴. 共有几条对称轴?

9. 观察下面各图案,它们都是轴对称图形. 它们各有几条对称轴?

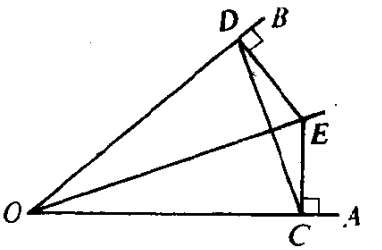

(1) (2) (3)
(第 9 题)

B 组

1. 已知：$\triangle ABC$ 中，边 AB、BC 的垂直平分线相交于点 P.
   求证：点 P 在 AC 的垂直平分线上.
2. 如图，求作一点 P，使 $PA=PB$，$PC=PD$.

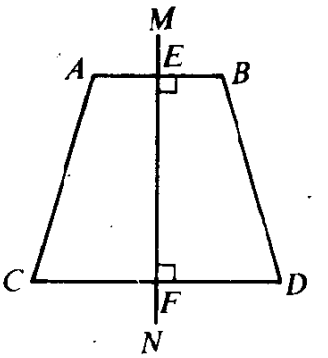


（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：E 是$\angle AOB$的平分线上一点，$EC\perp OA$，$ED\perp OB$，垂足分别是 C、D.
   求证：(1)$\angle ECD=\angle EDC$；
   (2)$OC=OD$；
   (3)OE 是 CD 的垂直平分线.
4. 已知：如图，MN 垂直平分线段 AB、CD，垂足分别为 E、F.
   求证：$AC=BD$，$\angle ACD=\angle BDC$.



（第 4 题）

五　勾股定理

3.16　勾股定理

中国古代把直角三角形中较短的直角边叫做勾，较长的直角边叫做股，斜边叫做弦．据《周髀算经》记载，西周开国时期(约公元前 1 千多年)有个叫商高的人对周公说，把一根直尺折成直角，两端连接得一个直角三角形，如果勾是 3，股是 4，那么弦等于 5.

人们还发现，在直角三角形中，勾是 6，股是 8，弦一定是 10；勾是 5，股是 12，弦一定是 13，等等．而 $3^2+4^2=5^2$，$6^2+8^2=10^2$，$5^2+12^2=13^2$，…，即勾^2＋股^2＝弦^2．是不是所有的直角三角形都有这个性质呢？世界上许多数学家，先后用不同方法证明了这个结论．我国把它称为勾股定理．

勾股定理　**直角三角形两直角边 a、b 的平方和，等于斜边 c 的平方．**

$$a^2+b^2=c^2.$$

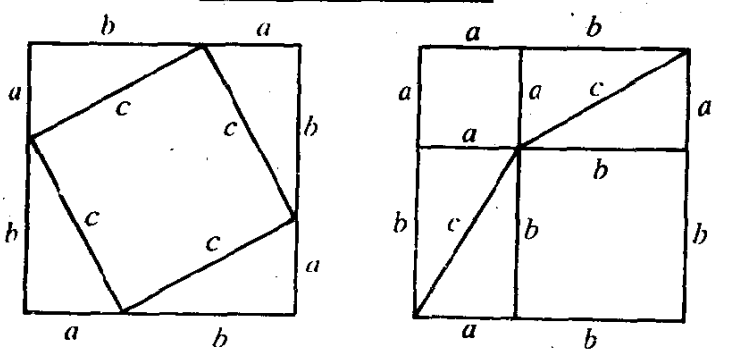


图　3－74

下面我们用拼图的方法来证明.

做8个全等的直角三角形.设它们的两条直角边长分别为 a、b,斜边长为 c,再做三个边长分别为 a、b、c 的正方形,把它们像图 3－74 那样拼成两个正方形.

从图上可以看到,这两个正方形的边长都是 $a+b$,所以面积相等,即 $a^2+b^2+4\times\frac{1}{2}ab=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$,得

$$a^2+b^2=c^2.$$

根据勾股定理,在直角三角形中,已知任意两条边长,可以求出第三条边的长.

例 1 已知:如图3－75,等边△ ABC 的边长是 6 cm.

(1)查表求高 AD 的长;

(2)求 $S_{\triangle ABC}$.

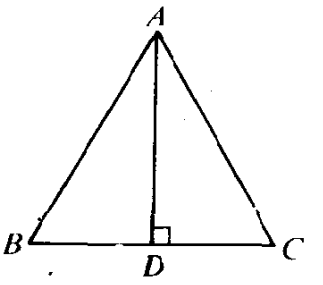


图 3－75

解: (1)∵ △ ABC 是等边三角形,AD 是高,

$$\therefore\quad BD=\frac{1}{2}BC=3.$$

在Rt△ ABD 中, $AB=6$, $BD=3$,根据勾股定理,

$$AD^2=AB^2-BD^2.$$

$$\therefore\quad AD=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=5.196\,(\text{cm}).$$

$$(2)\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD$$

$$=\frac{1}{2}\times 6\times 5.196=15.588\,(\text{cm}^2).$$

练　习

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

(1)已知 $a=6, c=10$，求 b；

(2)已知 $a=40, b=9$，求 c；

(3)已知 $c=25, b=15$，求 a.

2. 等边三角形的边长是 10. 求它的高及面积.

例 2　求图3－76所示(单位 mm)矩形零件上两孔中心 A 和 B 的距离(精确到 0.1 mm).

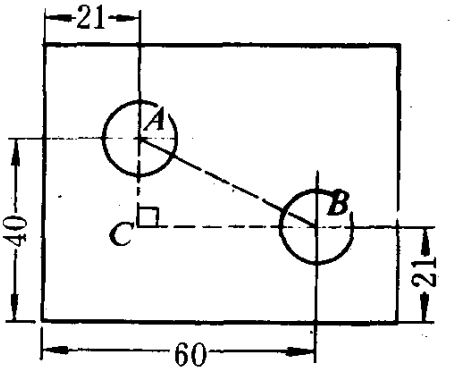


图　3－76

解：∵△ABC 是直角三角形，根据勾股定理，得

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

∴　$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$.

∵　$AC=40-21=19, BC=60-21=39$,

∴　$AB=\sqrt{19^2+39^2}=\sqrt{1882}$.

$AB\approx 43.4$ (mm).

答：两孔中心距离约为 43.4 mm.

例 3 作长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$的线段.

分析：由勾股定理，直角边长为 1 的等腰直角三角形，斜边长就等于$\sqrt{2}$，直角边长为$\sqrt{2}$、1 的直角三角形的斜边长就是$\sqrt{3}$.类似地也可作出$\sqrt{5}$.

作法：1. 作直角边长为 1(单位长)的等腰直角三角形 ACB (图 3－77).

2. 以斜边 AB 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 ABB_1.

3. 顺次这样作下去，最后作到直角三角形 AB_2B_3，这时斜边 AB、AB_1、AB_2、AB_3 的长度就是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{4}$、$\sqrt{5}$.

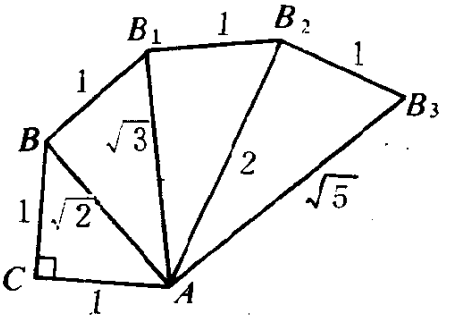


图 3－77

证明：根据勾股定理，在 Rt $\triangle ACB$ 中，

$$AB^2=AC^2+BC^2=1^2+1^2=2.$$

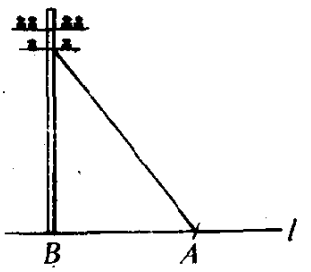
$\because$ $AB>0$,

$\therefore$ $AB=\sqrt{2}$.

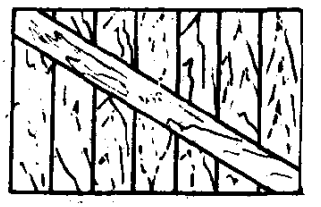
其他同理可证.

练　习

1. 已知：如图，要从电杆离地面 5 米处向地面拉一条长 7 米的电缆，求地面电缆固定点 A 到电线杆底部 B 的距离.



(第 1 题)



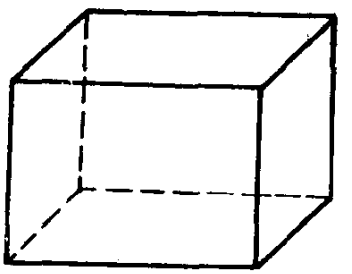
(第 2 题)

2. 如图，一个高 2 米，宽 3 米的大门，需在相对角的顶点间加一个加固木板. 求木板长.

3. 用尺规作线段 AB，使 $AB=\sqrt{13}$.

想一想

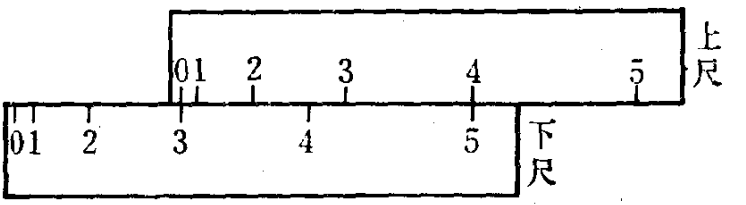
有一根 70 cm 的木棒，要放在长、宽、高分别是 30 cm，40 cm，50 cm 的木箱中，能放进去吗?



勾股计算尺

做一做

取两把直尺，在尺上各贴一条坐标纸(如图). 以一个端点为0，以1 mm为单位，在0的右方1 mm处标上1表示1^2，在0的右方4 mm处标上2，表示2^2，在0的右方9 mm处标上3，16 mm处标上4，分别表示3^2，4^2，等等.



用这种尺，可以在已知直角三角形两边的情况下，求出第三边.

例如，已知两条直角边$a=3$，$b=4$，求斜边c.

先将上尺的0与下尺的3对齐，在上尺找到4，4在下尺所对的数5，便是所求的c的长.

如果已知斜边$c=5$，一条直角边$a=3$，求另一条直角边，仍然是先将上尺的0与下尺的3对齐，然后在下尺上找到5，5在上尺上所对的数，就是另一条直角边的长.

试用勾股计算尺，求一条直角边长是5，斜边长为13的直角三角形的另一条直角边长.

3.17 勾股定理的逆定理

勾股定理的逆定理 如果三角形的三边长 a、b、c 有下面关系：

$$a^2+b^2=c^2,$$

那么这个三角形是直角三角形.

已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，并且 $a^2+b^2=c^2$（图 3－78）.

求证：$\angle C=90°$.

证明：作 $\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$C'A'=b$，那么 $A'B'^2=a^2+b^2$.

$\because$ $a^2+b^2=c^2$，

$\therefore$ $A'B'=c$ $(A'B'>0)$.

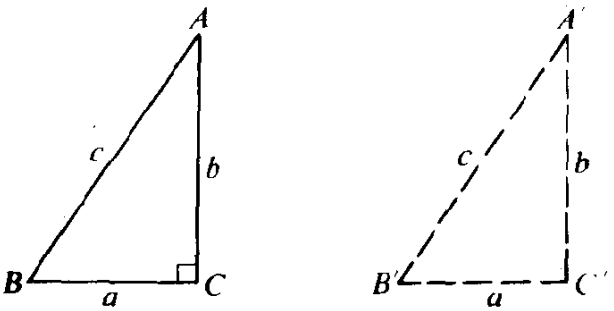


图 3－78

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$\because$ $BC=a=B'C'$，$CA=b=C'A'$，$AB=c=A'B'$，

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

$\therefore$ $\angle C=\angle C'=90°$.

例 已知：在$\triangle ABC$中，三条边长分别为a、b、c，$a=n^2-1$，$b=2n$，$c=n^2+1$ $(n>1)$.

求证：$\angle C=90°$.

证明：$\because$ a^2+b^2

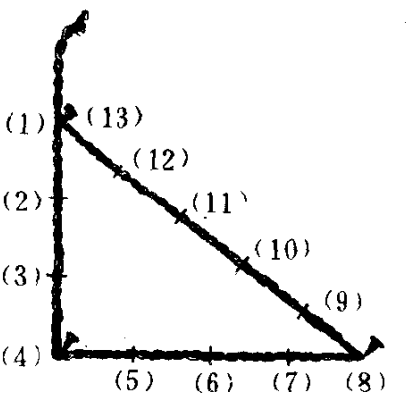
$$=(n^2-1)^2+(2n)^2$$
$$=n^4-2n^2+1+4n^2$$
$$=n^4+2n^2+1$$
$$=(n^2+1)^2=c^2,$$

$\therefore$ $\angle C=90°$（勾股定理的逆定理）.

能够成为直角三角形三条边长的三个正整数，称为勾股数(或勾股弦数).

练 习

1. 古埃及人用下面方法画直角：把一根长绳打上等距离的13个结，然后用桩钉如图那样钉成一个三角形，其中一个角便是直角，说明这种做法的根据.



(第1题)

2. 除3，4，5外，再找出5组勾股数.
3. 如果三条线段长a、b、c满足$a^2=c^2-b^2$，这三条线段组成的三角形是不是直角三角形？为什么？

习 题 3.9

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

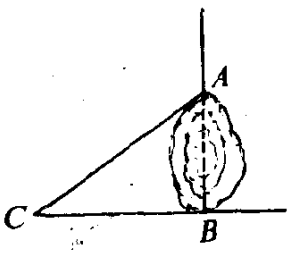
(1)勾股定理的内容是什么？已知直角三角形中两条边长，怎样求第三边？

(2)到目前为止，我们学过直角三角形哪些特殊性质？

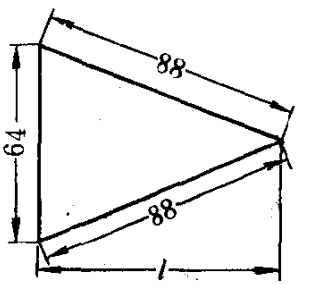
(3)勾股定理的逆定理是什么？

(4)用哪些方法可以判定一个三角形是直角三角形？

2. 隔湖有两点 A、B，从与 BA 方向成直角的 BC 方向上的点 C，测得 $CA=50$ m，$CB=40$ m．求 AB．



(第2题)



(第3题)

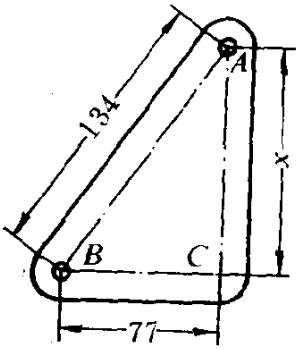
3. 已知一个工件尺寸如图(单位 mm)，计算 l 的长(精确到 0.1 mm)．

4. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=10$．

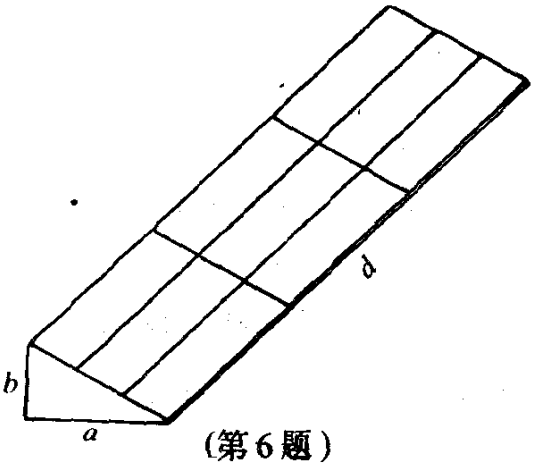
(1)$\angle A=30°$，求 BC、AC；

(2)$\angle A=45°$，求 BC、AC．

5. 如图(单位 mm)，车床齿轮箱壳要钻两个圆孔，两孔中心的距离 AB 是 134 mm，两孔中心的水平距离 BC 是 77 mm，计算两孔中心的垂直距离 AC（精确到 0.1 mm）.



（第 5 题）



（第 6 题）

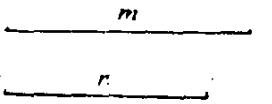
6. 要修一个育苗棚(如图)，棚宽 $a=3$ m，高 $b=1.5$ m，长 $d=10$ m．求覆盖在顶上的塑料薄膜需多少 m^2（精确到 $0.1m^2$）?

7. 一艘轮船以 16 海里/时的速度离开港口向东南方向航行．另一艘轮船在同时同地以 12 海里/时的速度向西南方向航行．它们离开港口一个半小时后相距多远?

8. 已知：线段 m、$n(m>n)$.

求作：线段 l，使 $l^2=m^2-n^2$.

（不写作法，保留作图痕迹）



（第 8 题）

9. 判断由线段 a、b、c 组成的三角形是不是直角三角形：

(1) $a=7$，$b=24$，$c=25$；

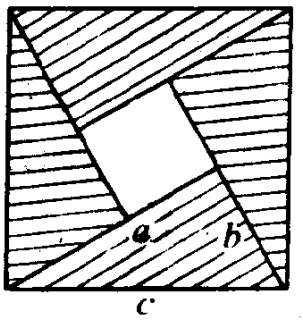
(2) $a=1.5$，$b=2$，$c=2.5$；

(3) $a=\frac{5}{4}$，$b=1$，$c=\frac{2}{3}$.

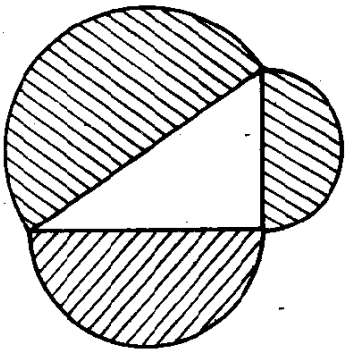
10. 已知：在△ ABC 中，$AB=13$ cm，$BC=10$ cm，BC 边上的中线 $AD=12$ cm．求证：$AB=AC$.

B 组

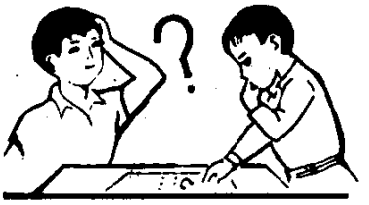
1. 求高等于 2 的等边三角形的边长.
2. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=2.1\text{cm}$，$BC=2.8\text{cm}$.
   求：(1)△ABC 的面积；(2)斜边 AB；(3)高 CD.
3. 一个等腰三角形的周长是 16 厘米，底边上的高是 4 厘米，求：这个三角形各边的长.
4. 如图，在边长为 c 的正方形中，有四个斜边为 c 的全等直角三角形，已知它们的直角边长为 a，b. 利用这个图证明勾股定理.（这个图叫做勾股圆方图，我国古代数学家赵爽在他所著的《勾股圆方图注》中，用这个图证明了勾股定理.）



(第 4 题)



想一想

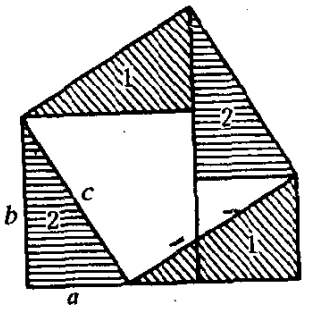


如上图，分别以直角三角形三边为直径作三个半圆，这三个半圆的面积之间有什么关系？为什么？

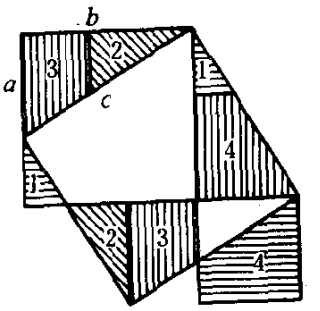
勾股定理的证明

读一读

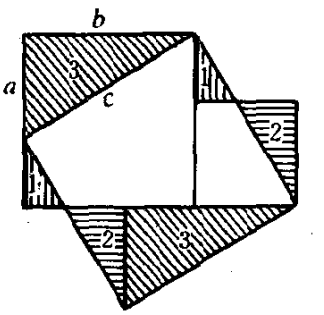
勾股定理是几何中一个非常重要的定理.长期以来,人们对它进行了大量的研究,找到了许多不同的证明方法.这些证明不仅证出了定理,而且丰富了研究数学问题的方法和手段,促进了数学的发展.目前世界上可以查到的证明勾股定理的方法有几百种.下面介绍几种证明勾股定理的图形,你能根据这些图形及提示,证明勾股定理吗?



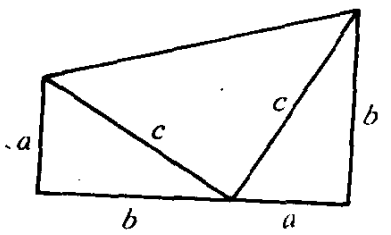
(1)



(2)



(3)



(4)

(4)提示: $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$

$$=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab.$$

小结与复习

本章主要内容是有关三角形的一些知识，包括三角形全等的判定和两种特殊三角形——等腰三角形、直角三角形的一些性质.

一、内容提要

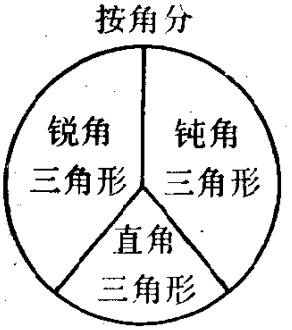
(一)三角形的边角关系

1. 两边的和大于第三边，两边的差小于第三边.

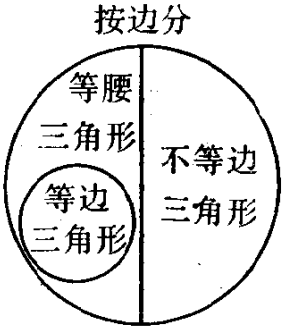
2. 内角的和等于 180°. 一个外角等于和它不相邻的两个内角的和，大于其中任何一个内角.

(二)三角形分类

三角形可以按角或按边分类如下:



三角形集合



三角形集合

(三)判定两个三角形全等有下面一些公理及推论:

一般三角形: *SAS*, *ASA* , *AAS*, *SSS* .

直角三角形: 除 *SAS* , *ASA* , *AAS* , *SSS* 外，还有 *HL* .

三角形全等的判定公理及推论，是进一步研究平面几何问题的基础．例如，利用三角形全等可以证明线段、角相等．

(四) 等腰三角形和直角三角形都是特殊三角形，除具有一般三角形的性质外，还有一些重要性质．

等腰三角形:

1. 底角相等．

2. 顶角的平分线、底边上的高、中线互相重合．

直角三角形:

1. 两个锐角互余．

2. 如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半．

3. 勾股定理及其逆定理．

(五)尺规作图

尺规作图与工具作图不同，只允许使用直尺(无刻度)和圆规．一些尺规作图的作法，都是由基本作图组成的．

(六)轴对称

1. 线段是轴对称图形．线段的垂直平分线是它的对称轴．线段的垂直平分线上的点和这条线段的两端距离相等．它的逆命题也成立．

2. 角是轴对称图形. 角的平分线所在的直线是它的对称轴. 在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等. 它的逆命题也成立.

3. 关于某直线对称，是对两个图形说的，它表示两个图形之间的对称关系；轴对称图形是对一个图形说的，它表示某个图形的特性. 这两个概念有联系，也有区别.

(七) 逆命题、逆定理

1. 交换一个命题的题设和结论，所得到的命题与原命题是互逆命题.

2. 原命题是真命题，它的逆命题不一定也是真命题. 如果原命题经过证明是真命题，逆命题也是真命题，那么它们组成一对互逆定理.

二 学习要求

1. 理解三角形及有关概念，掌握三角形边角关系的定理及推论. 理解三角形全等的概念，掌握全等三角形的性质和判定两个三角形全等的方法. 掌握等腰三角形的性质和判定，掌握直角三角形的一些性质，掌握勾股定理及其逆定理. 掌握线段垂直平分线、角平分线的性质定理及逆定理.

2. 理解轴对称和轴对称图形的概念，了解轴对称的性质.

3. 了解互逆命题和互逆定理的概念及互逆命题之间的关系.

4. 了解尺规作图的意义，掌握基本作图，了解几何作图题的一般步骤，能作一些简单的几何作图题，包括能作一个图形关于某直线的对称图形.

5. 基本上掌握证明几何命题的一般步骤，能正确地用综合法的形式书写证明过程. 能灵活运用学过的公理、定理及推论证明简单的几何证明题.

6. 通过本章学习，逐步学会分析证明几何命题的思路，认识特殊与一般的关系，了解分类的基本思想，从而提高逻辑思维能力及分析问题解决问题的能力.

三、需要注意的几个问题

1. 本章内容较多，复习时要注意弄清知识之间的关系，使知识系统化. 另外还应学会从不同角度整理知识，以便于灵活运用这些知识. 例如，通过复习，整理一下本章学过哪些证明线段相等、角相等的定理(或公理)? 哪些定理是互逆的? 本章学过哪些辅助线的作法? 等等.

2. 本章出现过的图形较多，但仔细观察分析可以发现，它们大都是由一些基本图形变化来的. 复习时，要注意掌握一些最常见的基本图形，学会分析所遇到的图形是由哪些基本图形变化来的.

复 习 题 三

A 组

1. 选择题：下列命题中的假命题是(　　)

(A)等腰三角形是锐角三角形.

(B)等腰直角三角形是直角三角形.

(C)等边三角形是等腰三角形.

(D)等边三角形是锐角三角形.

2. 已知：O 是$\triangle ABC$ 内一点. 求证：

(1)$\angle BOC > \angle A$；

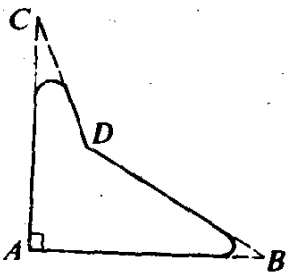
(2)$\frac{1}{2}(BC+CA+AB)<OA+OB+OC$.

3. 已知：$\triangle ABC$ 的$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线BE、CF 交于点I.

求证：(1)$\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$;

(2)$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

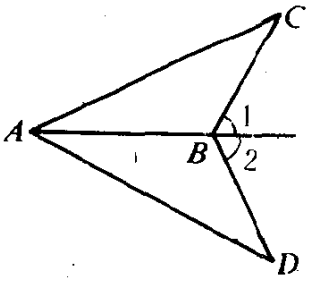
4. 一个零件的形状如图，按规定$\angle A$ 应等于90°，$\angle B$、$\angle C$ 应分别是21°和32°. 检验工人量得$\angle BDC=148°$，就断定这个零件不合格，这是为什么呢？



(第4题)

5. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$，$BC=BD$.

求证：$AD=AC$.



(第5题)

6. 求证：如果延长$\triangle ABC$的中线AD至A'，使$DA'=AD$，那么$A'C=AB$.

7. 求证：全等三角形对应边上的中线相等.

8. 求证：三角形一条边的两端到这边上的中线或中线延长线的距离相等.

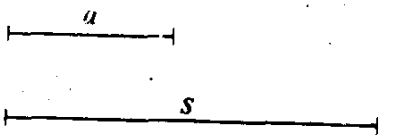
9. 求证：如果两个三角形有两个角和第三个角的角平分线对应相等，那么这两个三角形全等.

10. 求证：两个锐角三角形有两边和其中一边上的高对应相等，那么这两个三角形全等.

11. 求作等腰直角三角形，使它的斜边等于已知线段.

12. 已知：线段a、s，$s>2a$.

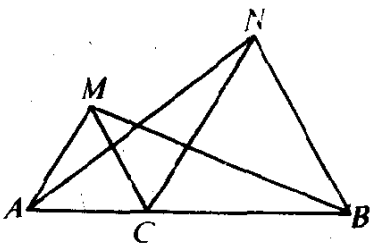
求作：等腰三角形，使它的底边等于a，周长等于s.



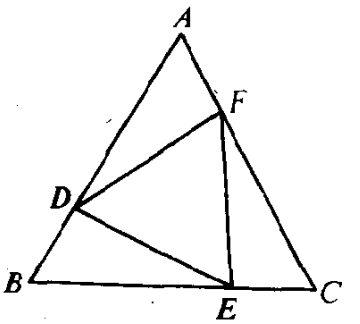
(第12题)

13. 已知：如图，点C为线段AB上一点，$\triangle ACM$、$\triangle CBN$是等边三角形.

求证：$AN=BM$.



(第13题)

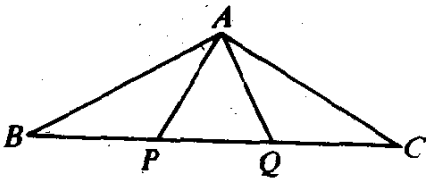


(第14题)

14. 如图，在等边三角形 ABC 的三边上，分别取点 D、E、F，使 $AD=BE=CF$．求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形．

15. 已知：$\triangle ABC$ 中，I 是角平分线 BE 和 CF 的交点，MN 经过 I，平行于 BC，交 AB 于点 M，交 AC 于点 N．
求证：$MN=BM+CN$．

16. 已知：P、Q 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上两点，并且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$．
求 $\angle BAC$．

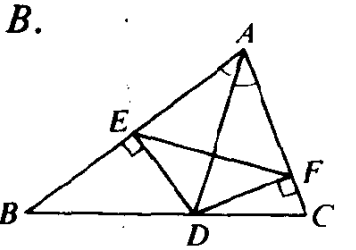


（第16题）

17. 求证：如果把等腰三角形的底边向两方向分别延长相等线段，那么延长线段的两个外端与等腰三角形的顶点距离相等．

18. 已知线段 AB．求作一点，使它到 A、B 两点距离相等，并且到线段 AB 的距离等于 $\frac{1}{2}AB$．

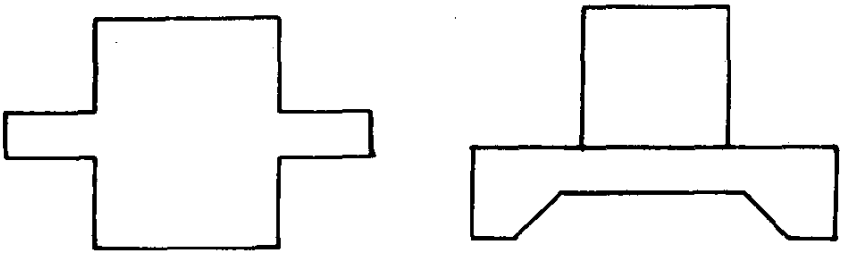
19. 已知：如图，AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，DE、DF 分别是 $\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 的高．
求证：AD 垂直平分 EF．



（第19题）

20. 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边上的中线，AB 的垂直平分线交 AD 于点 O，$\angle B$ 的平分线交 AD 于点 I．
求证：(1) $OA=OB=OC$；
(2) I 到 BC、CA、AB 的距离相等．

21. 下列图形，如果有对称轴，作出它们的对称轴.



(1)　　(2)

(第 21 题)

22. 已知: $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 上的高, $AB=AC$, $\angle BAC=120°$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 垂足分别是 E、F.

求证: $DE+DF=\frac{1}{2}BC$.

23. 已知等腰三角形底边、腰的长分别为 12 cm 和 10 cm. 求它的面积.

24. (1)已知: $\triangle ABC$ 的三个角度数的比 $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$. 求证: $b^2=3a^2$.

(2)已知: $\triangle ABC$ 的三个角度数的比 $\angle A:\angle B:\angle C=1:1:2$. 求证: $c^2=2a^2$.

25. 判断题: 正确的在括号内画“$\surd$”，不正确的画“$\times$”.

(1)关于某直线对称的两个三角形是全等三角形; (　　)

(2)真命题的逆命题是真命题; (　　)

(3)原命题是假命题，它的逆命题也是假命题; (　　)

(4)等腰三角形的判定定理与它的性质定理是互逆定理. (　　)

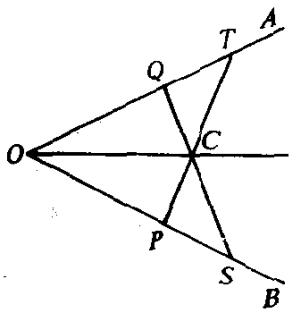
B 组

1. 如图，在$\angle AOB$的两边OA、OB上分别取$OQ=OP$，$OT=OS$，PT和QS相交于点C.

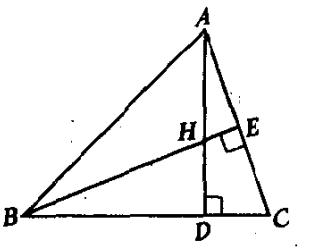
   求证：OC平分$\angle AOB$.

2. 已知：$\triangle ABC$中，$\angle ABC=45°$，H是高AD和BE的交点.

   求证：$BH=AC$.



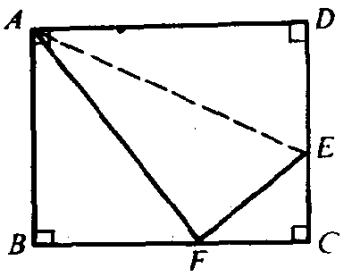
(第1题)



(第2题)

3. 如图，折叠长方形(四个角都是直角,对边相等)的一边AD，点D落在BC边的点F处.已知$AB=8\ cm$，$BC=10\ cm$.

   求EC的长.



(第3题)

自我测验三

（满分 100 分，时间 45 分）

1. (每小题 5 分，共 15 分)选择题：

(1) 以下列各组线段为边，能组成三角形的是(　　)

(A) 1 cm，2 cm，4 cm.

(B) 8 cm，6 cm，4 cm.

(C) 12 cm，5 cm，6 cm.

(D) 2 cm，3 cm，6 cm.

(2) 三角形一个外角小于与它相邻的内角，这个三角形(　　)

(A) 是直角三角形.　　(B) 是锐角三角形.

(C) 是钝角三角形.　　(D) 属于哪一类不能确定.

(3) 使两个直角三角形全等的条件是(　　)

(A) 一锐角对应相等.

(B) 两锐角对应相等.

(C) 一条边对应相等.

(D) 两条边对应相等.

2. (每空 5 分，共 25 分)填空：

(1) 等腰三角形一底角为 30°，底边上的高为 9 cm，则这个等腰三角形的腰长是 _____cm，顶角是 _____；

(2) 等腰直角三角形一条直角边长 1 cm，那么它斜边上的高是 _____cm；

(3) 已知线段 AB 和点 C、D，且 $CA=CB, DA=DB$. 那么直线 CD 是线段 AB 的 _____；

(4) 一个角的平分线可以看作是 _____ 的点的集合.

3. (每小题 10 分，共 20 分)

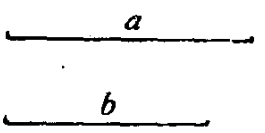
(1) 已知：线段 a、b $(a>b)$ (如图).

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=AC=a$，$BC=b$.

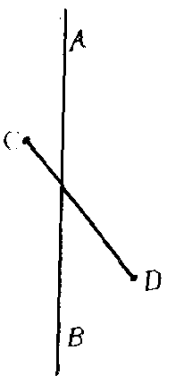
(2) 已知：如图. 直线 AB 和线段 CD.

求作：线段 CD 关于直线 AB 的对称线段 $C'D'$.

(作图题一律不写作法，保留作图痕迹.)



(第 3 (1) 题)

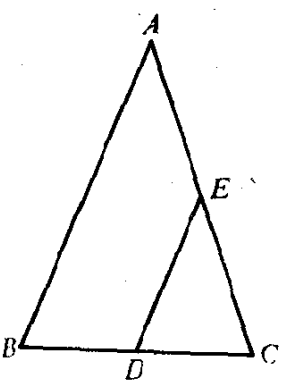


(第 3 (2) 题)

4. (每小题 10 分，共 20 分) 已知：如图，$AB=AC=10$ cm，$BC=6$ cm，D 为 BC 的中点，且 $DE \parallel BA$.

(1) 求证：$DE=EC$.

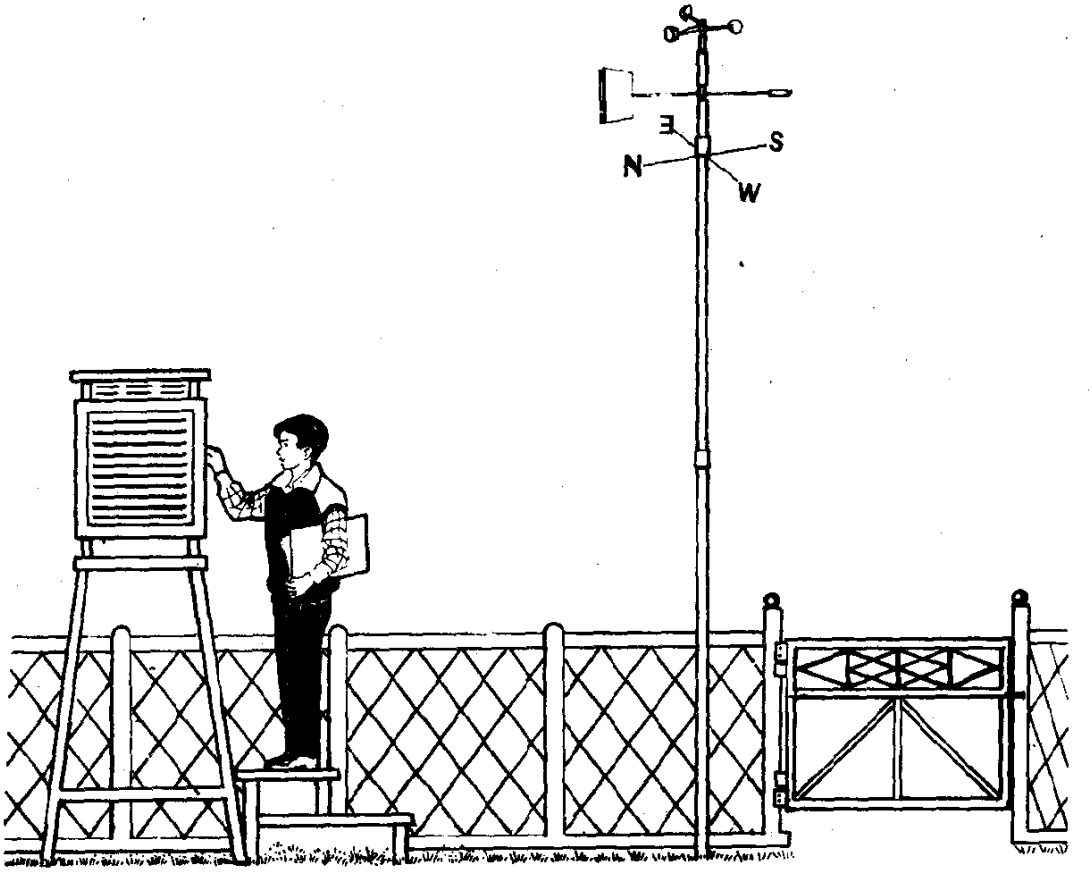
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



(第 4 题)

5. (20 分) 求证：等腰三角形两腰上的高的交点，与底边两端点的距离相等.

第四章　四边形



在小学里，我们学过长方形、正方形、平行四边形和梯形的有关知识．在上图中，你能把它们找出来吗？这些图形都是四边形．在这一章，我们将比较系统地学习各种四边形的性质与判定，分析它们之间的关系，并运用有关四边形的知识解决一些新问题．

一　四边形

4.1　四边形

我们知道，由三条线段首尾顺次相接组成的图形是三角形．类似地，在平面内，由不在同一条直线的四条线段首尾顺次相接组成的图形叫做**四边形**(图 4－1)．组成四边形的各条线段叫做**四边形的边**，每相邻两条边的公共端点叫做**四边形的顶点**．四边形用表示它的各个顶点的字母来表示．如图 4－1 中的四边形，可以按照顶点的顺序，记作四边形 $ABCD$．

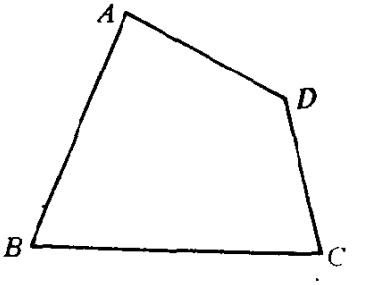


图　4－1

如图 4－2，把四边形的任何一边向两方延长，如果其他各边都在延长所得直线的同一旁，这样的四边形叫做**凸四边形**．图 4－3 中的四边形不是凸四边形．本书今后所说的四边形都是指凸四边形．

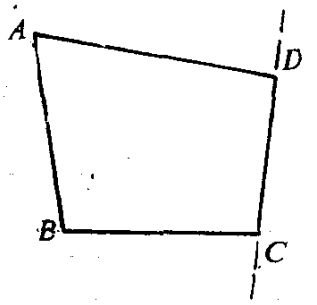


图　4－2

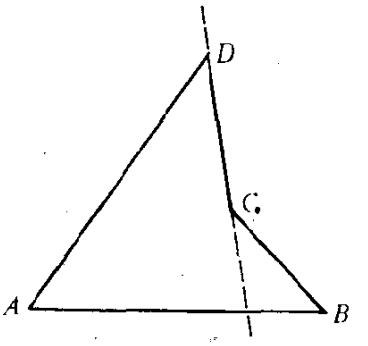


图　4－3

在四边形中，连结不相邻两个顶点的线段叫做**四边形的对角线**. 如图 4－4，在四边形 $ABCD$ 中，我们可以作两条对角线 AC 和 BD.

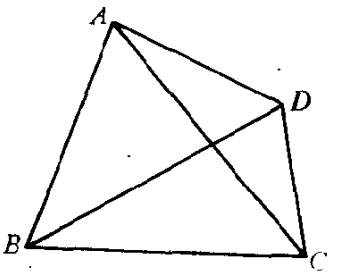


图 4－4

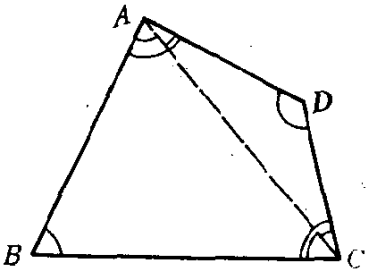


图 4－5

四边形相邻两边所组成的角叫做**四边形的内角**，简称**四边形的角**. 我们知道，三角形的内角和等于 180°，那么，四边形的内角和是多少度呢?

如图 4－5，作四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，它把四边形分成两个三角形. 四边形的四个角的和就是这两个三角形的内角的和，因此，四边形的内角和等于

$$2\times 180^\circ = 360^\circ .$$

于是得到:

定理　四边形的内角和等于 360°.

注意　在研究四边形时，常常通过作它的对角线，把关于四边形的问题化成关于三角形的问题来解决.

例 1　已知:如图4－6，直线 $OB\perp AB$，垂足为 B，直线 $OC\perp AC$，垂足为 C.

求证:(1) $\angle A+\angle 1=180^\circ$；(2) $\angle A=\angle 2$.

证明：(1) ∵ $\angle A+\angle ACO+\angle 1+\angle ABO=360°$ (四边形的内角和等于 360°)，

$\angle ACO=90°$，$\angle ABO=90°$，

∴ $\angle A+\angle 1=360°-90°-90°=180°$.

(2) ∵ $\angle A+\angle 1=180°$，$\angle 2+\angle 1=180°$，

∴ $\angle A=\angle 2$.

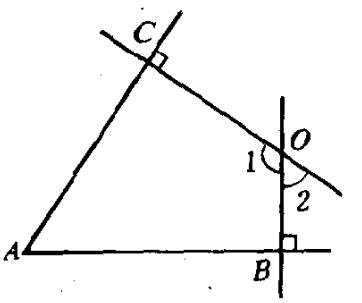
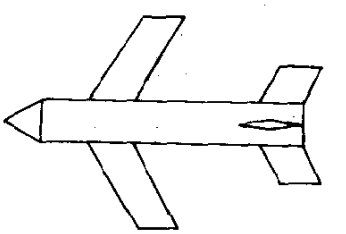


图 4-6

练 习

1. 观察图中有几个四边形．在其中一个四边形的顶点处标上字母，并用字母把这个四边形表示出来．



(第 1 题)

2. 图 4－1 的四边形可以记作四边形 $ACBD$ 或四边形 $BCAD$ 吗？为什么？
3. 四边形的四个内角可以都是锐角吗？可以都是钝角吗？可以都是直角吗？为什么？

与三角形类似，四边形的角的一边与另一边的延长线所组成的角叫做**四边形的外角**，四边形的外角是与它有公共顶点的内角的邻补角.

例 2 已知：如图4－7，四边形 $ABCD$ 的四个角分别为$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$，每个顶点处有一个外角，设它们分别为$\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$、$\angle\delta$.

求：$\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta$.

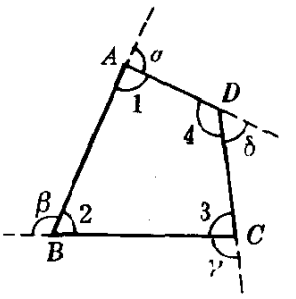


图 4－7

解：$\because$ $\angle 1+\angle\alpha=\angle 2+\angle\beta=\angle 3+\angle\gamma=\angle 4+\angle\delta=180°$，

$\therefore$ $(\angle 1+\angle\alpha)+(\angle 2+\angle\beta)+(\angle 3+\angle\gamma)+(\angle 4+\angle\delta)=4\times 180°=720°$.

整理，得 $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta=720°-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$.

$\because$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°$（四边形的内角和等于360°），

$\therefore$ $\angle\alpha+\angle\beta+\angle\gamma+\angle\delta=720°-360°=360°$.

在四边形的每个顶点处取它的一个外角，这四个外角的和就是四边形的外角和.

由例 2 可以得到，**四边形的外角和等于 360°**.

我们知道，三角形具有稳定性. 那么四边形呢？

我们做个实验，用四根木条钉成如图 4－8 的木框.

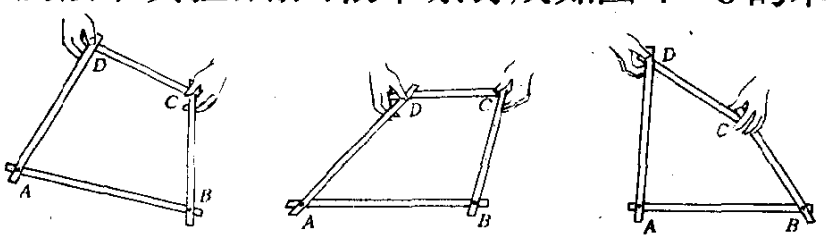


图 4－8

从图中可以看出，虽然四边形的边长不变，但它的形状改变了.这说明四边形没有稳定性.

在生产和生活中,有时候我们需要利用四边形的不稳定性，如图 4－9 的活动铁门. 有时又要克服四边形的不稳定性，如在图 4－10 的木门上加钉斜条，构成三角形.

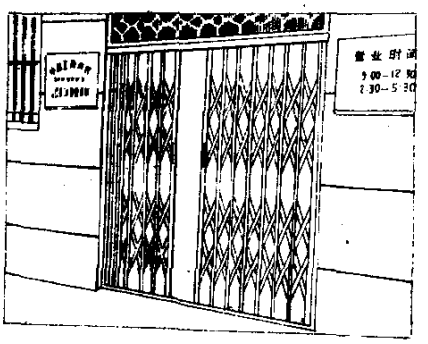


图 4－9

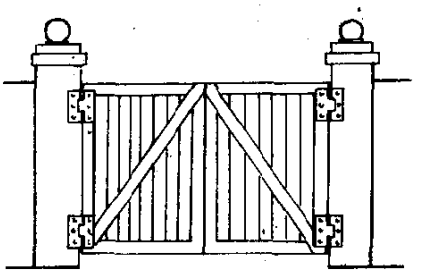
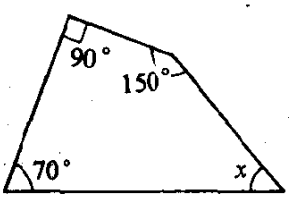
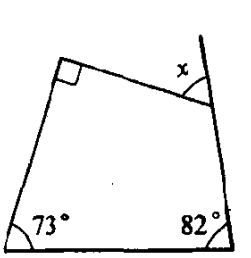


图 4－10

练 习

1. 计算下列图中$\angle x$的度数:





(第 1 题)

2. 以$AB=20$ mm,$BC=30$ mm,$CD=18$ mm,$DA=21$ mm为边,画四边形$ABCD$.和同学们比较一下,大家画出的四边形形状一样吗?如果使$\angle ABC=60°$,再画这个四边形,大家画的形状一样吗?

4.2 多边形的内角和

我们学过三角形、四边形.类似地，在平面内，由一些线段首尾顺次相接组成的图形叫做**多边形**. 多边形的边、顶点、内角、外角、对角线的意义和四边形相同.多边形有几条边就叫几边形.

同四边形一样，本书中所说的都是凸多边形.

多边形是我们常见的图形.如图 4－11 的石英钟的钟框、六角螺母的各个面，都有多边形的形象.

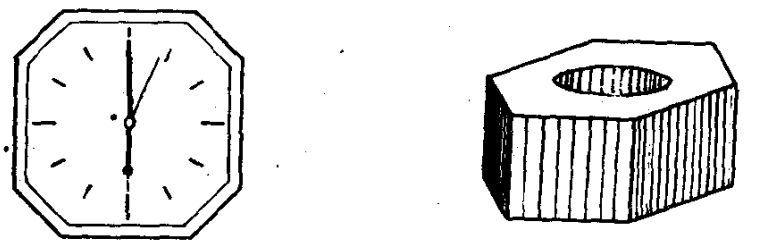


图 4－11

我们知道，三角形的内角和等于 180°，四边形的内角和等于 360°，即 $2\times180°$，那么 n 边形的内角和等于多少呢?

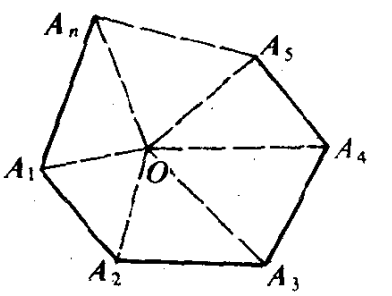


图 4－12

如图 4－12，在 n 边形内任取一点 O，连结 O 与各个顶点的线段，把 n 边形分成 n 个三角形.因为这 n 个三角形的内角的和等于 $n\cdot180°$，以 O 为公共顶点的 n 个角的和是 $2\times180°$，所以 n 边形的内角和是

$$n\cdot 180^\circ-2\times 180^\circ=(n-2)\cdot 180^\circ.$$

由此得到下面的定理：

多边形内角和定理　n 边形的内角的和等于$(n-2)\cdot 180^\circ$.

在多边形的每个顶点处取多边形的一个外角，它们的和叫做多边形的外角和. 因为多边形的每一个内角与它相邻的外角是邻补角，所以 n 边形的内角和加外角和等于$n\cdot 180^\circ$，外角和等于$n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$. 于是得到：

推论　任意多边形的外角和等于 360°.

例　已知一个多边形，它的内角和等于外角和的 2 倍，求这个多边形的边数.

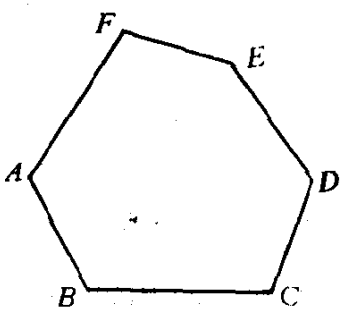
解：设多边形的边数为 n，因为它的内角和等于$(n-2)\cdot 180^\circ$，外角和等于 360°，所以，

$$(n-2)\times 180^\circ=2\times 360^\circ.$$

解得　　$n=6$.

练　习

1. 举出 1～2 个多边形的实例.
2. 右图是几边形？指出它的边、顶点和内角. 过顶点 A 作这个多边形的所有对角线. 在这个多边形的每个顶点作出它的一个外角.



(第 2 题)

3. 六角螺母的一个面有六边形，它的六个内角相等．求每一个内角的度数．

4. 一个多边形的每一个外角都等于72°，这个多边形是几边形？它的每个内角是多少度？

想一想

我们知道，过四边形一个顶点的对角线，可以把四边形分成两个三角形．做做看，过五边形一个顶点的对角线，可以把五边形分成几个三角形，对于六边形、七边形、如图1的n边形呢？你会发现，过n边形一个顶点的所有对角线，可以把n边形分成$(n-2)$个三角形．想一想，这是为什么？

如图2，在n边形的边上任意取一点，连结这点与各顶点的线段可以把n边形分成几个三角形？

想一想，利用这两个图形，怎样证明多边形内角和定理．

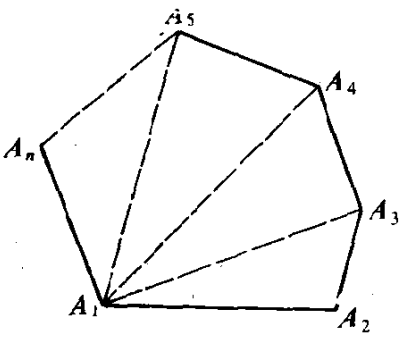


图 1

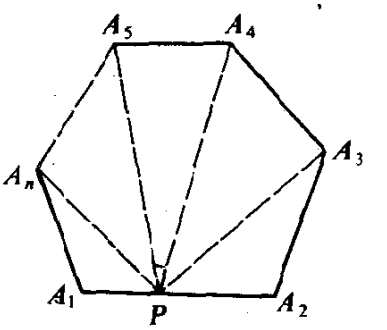


图 2

习 题 4.1

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

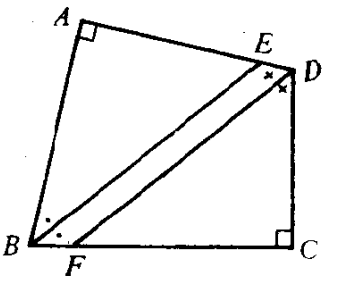
(1) 四边形的内角和等于多少度？为什么？

(2) 多边形内角和定理及其推论的内容是什么？怎样证明？

2. 画一个四边形并作它的两条对角线．作一条线段 a，使它等于两条对角线长的和；再作一条线段 b，使它等于四边形的周长．比较线段 a、b 的大小．

3. 在四边形 $ABCD$ 中，已知：$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$．求证：$AD\parallel BC$．

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C=90°$，BE 平分 $\angle B$，DF 平分 $\angle D$．求证：$BE\parallel DF$．



(第 4 题)

5. (1) 一个多边形的内角和等于 1080°，求它的边数；

(2) 一个多边形的每一个内角都等于 144°，求它的边数；

(3) 一个多边形的每一个外角都等于 30°，求它的边数．

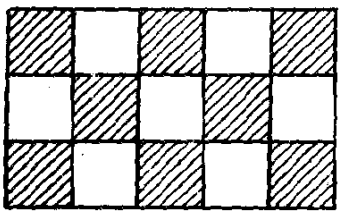
B 组

1. 如果一个多边形的边数增加 1，那么这个多边形的内角和增加多少度？若将 n 边形的边数增加一倍，则它的内角和增加多少度？

巧用材料

读一读

我们常常见到像图 1 那样图案的地板，它们分别是用正方形、等边三角形的材料铺成的．为什么用这样形状的材料能铺成平整、无空隙的地板呢？这是因为它们的角可以拼成周角，即可拼成 360°．



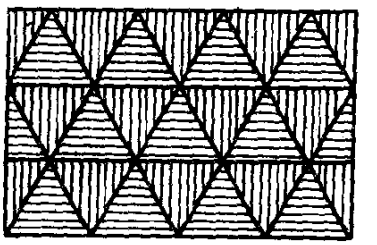


图 1

我们知道，任意四边形的内角和都等于 360°．根据这个道理，红光木器厂的工人师傅，把一批形状、大小完全相同，但不规则的四边形边脚余料用来铺地板．按照图 2 那样拼接四边形木块，就可以不留空隙，像图 3 那样铺成一大片．

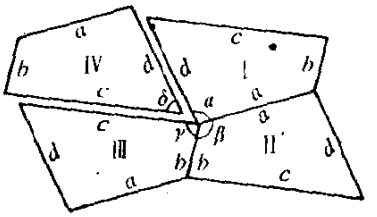


图 2

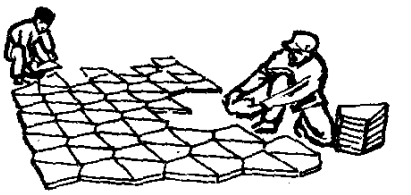


图 3

你自己用硬纸片剪一些全等的任意四边形，拼一拼看．想一想，用不等边的一些全等三角形，可以铺成无空隙的地板吗？

二　平行四边形

4.3　平行四边形及其性质

两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**．如图 4－13，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，那么四边形 $ABCD$ 是平行四边形．平行四边形用符号“$\square$”表示，平行四边形 $ABCD$ 记作“$\square ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”．

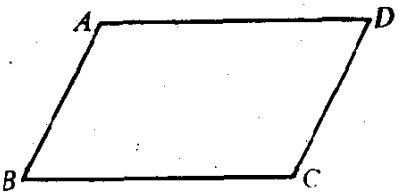


图　4－13

平行四边形是我们常见的图形，如图 4－14 的竹篱笆格子、汽车的防护链等都是平行四边形的形象．

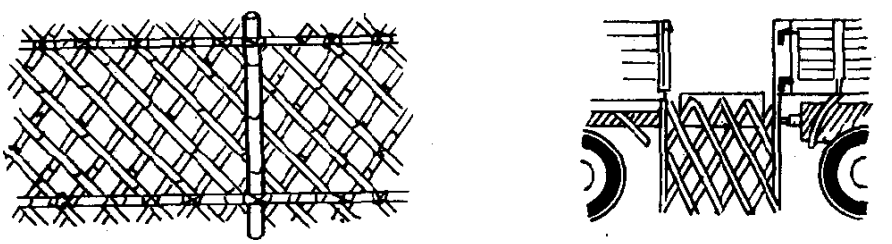


图　4－14

平行四边形是一种特殊的四边形(图 4－15)，它除具有四边形的性质外，还有一些特殊的性质．

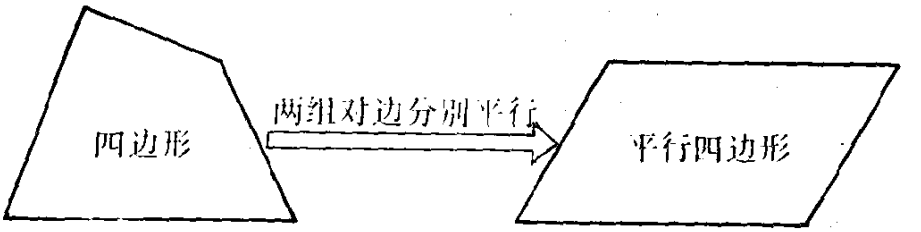


图 4－15

下面，我们来研究平行四边形的性质.

由定义知道，平行四边形的对边平行. 根据平行线的性质可知，在平行四边形中，相邻的角互为补角.

我们再看看平行四边形的对边、对角的大小有什么关系.

如图 4－16，作 $\square ABCD$ 的对角线 AC，它将平行四边形分成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$.

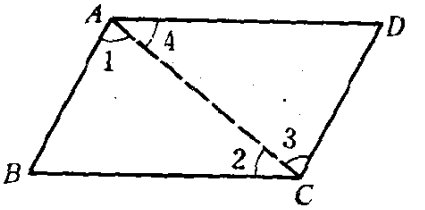


图 4－16

$\because$ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$.

又 $\because$ $AC = CA$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $AB = CD$，$CB = AD$，$\angle B = \angle D$.

又 $\because$ $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$，

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BCD$.

由此得到：

平行四边形性质定理 1　平行四边形的对角相等.

平行四边形性质定理 2　平行四边形的对边相等.

如图 4－17，$l_1 /\!/ l_2$，AB、CD 是 l_1、l_2 之间的任意两条平行线段，因为 $l_1 /\!/ l_2$，$AB /\!/ CD$，所以四边形 $ABDC$ 是平行四边形．因为平行四边形的对边相等，所以 $AB=CD$．

由此得到：

推论　夹在两条平行线间的平行线段相等.

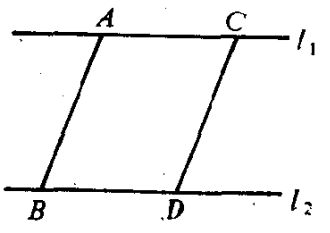


图　4－17

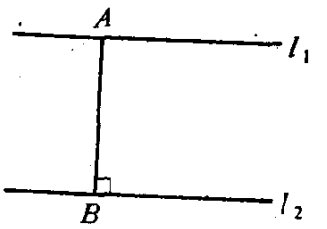


图　4－18

从推论可以知道，如果两条直线平行，那么一条直线上所有各点，到另一条直线的距离都相等．因此，可以用点到直线的距离来定义两条平行线的距离．两条平行线中，一条直线上任意一点到另一条直线的距离，叫做这**两条平行线的距离**．如图 4－18，$l_1 /\!/ l_2$，A 是 l_1 上的任意一点，$AB \perp l_2$，B 是垂足，线段 AB 的长就是 l_1、l_2 的距离．

例 1　已知：如图4－19，$A'B' /\!/ BA$，$B'C' /\!/ CB$，$C'A' /\!/ AC$．

求证：(1) $\angle ABC=\angle B'$，$\angle CAB=\angle A'$，$\angle BCA=\angle C'$.

(2) $\triangle ABC$ 的顶点分别是 $\triangle B'C'A'$ 各边的中点.

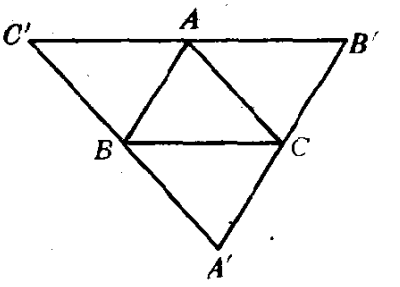


图 4－19

证明：(1) ∵ $A'B'/\!/BA$，$C'B'/\!/BC$，

∴ 四边形 $ABCB'$ 是平行四边形.

∴ $\angle ABC=\angle B'$ (平行四边形的对角相等).

同理 $\angle CAB=\angle A'$，$\angle BCA=\angle C'$.

(2) 由(1)证得四边形 $ABCB'$ 是平行四边形.

同理 四边形 $ABA'C$ 是平行四边形.

∴ $AB=B'C$，$AB=A'C$ (平行四边形的对边相等).

∴ $B'C=A'C$.

同理 $B'A=C'A$，$A'B=C'B$.

∴ $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 分别是 $\triangle B'C'A'$ 的边 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的中点.

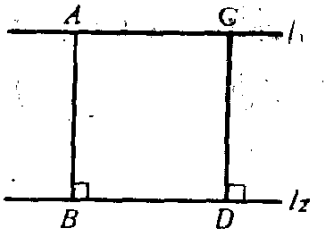
练 习

1. 在 $\square ABCD$ 中，已知 $\angle A=50°$，求 $\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 各等于多少度.
2. 已知 $\square ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$. 求这个平行四边形的周长.

3. 已知：直线 $l_1 \parallel l_2$.

(1) 如果 $AB \perp l_2$，那么 $AB \perp l_1$. 为什么？

(2) 如果 $AB \perp l_2$，$CD \perp l_2$，那么 $AB = CD$. 为什么？



(第3题)

平行四边形还有下面性质：

平行四边形性质定理 3　平行四边形的对角线互相平分.

已知：$\square ABCD$，对角线 AC、BD 相交于点 O(图 4－20).

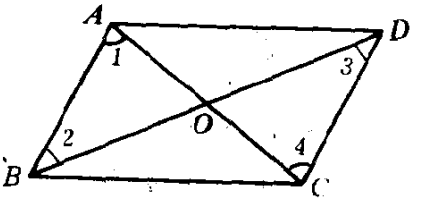


图 4－20

求证：$OA = OC$, $OB = OD$.

证明：∵ 在 $\square ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，

∴ $\angle 1 = \angle 4$，$\angle 2 = \angle 3$.

又∵ $AB = CD$ (平行四边形的对边相等)，

∴ $\triangle OAB \cong \triangle OCD$.

∴ $OA = OC$, $OB = OD$.

例 2　已知：如图4－21，$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，EF 过点 O 与 AB、CD 分别相交于点 E、F.

求证：$OE = OF$.

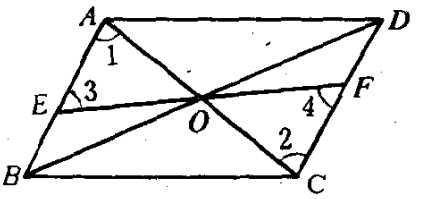


图 4－21

证明：在$\square ABCD$中，$\because$ $AB \parallel CD$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$.

又$\because$ $OA = OC$ (平行四边形的对角线互相平分)，

$\therefore$ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

$\therefore$ $OE = OF$.

例 3 已知$\square ABCD$，$AB = 8$ cm，$BC = 10$ cm，$\angle B = 30°$. 求$\square ABCD$ 的面积.

解：过 A 作$AE \perp BC$，垂足为 E (图 4－22).

在 Rt$\triangle ABE$ 中，

$\because$ $\angle B = 30°$，$AB = 8$，

$\therefore$ $AE = \dfrac{AB}{2}$

$= \dfrac{8}{2} = 4.$

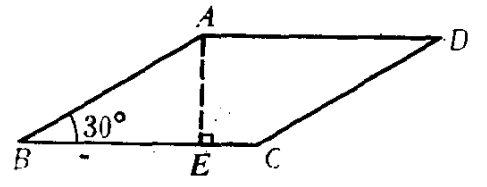


图 4－22

$\therefore$ $\square ABCD$ 的面积

$S_{\square ABCD} = BC \cdot AE = 10 \times 4 = 40\ (\text{cm}^2)$.

用 S 表示面积时，常在它的下角注上所求面积的图形标记. 如 $S_{\square ABCD}$ 表示的是$\square ABCD$ 的面积.

练　习

1. 如果平行四边形的两条对角线互相垂直，这个平行四边形的两条邻边有什么关系？为什么？
2. 已知 O 是$\square ABCD$ 的对角线交点，$AC = 24$ mm，$BD = 38$ mm，$AD = 28$ mm. 求$\triangle OBC$ 的周长.

4.4 平行四边形的判定

判定一个四边形是平行四边形，除根据定义来判定外，还有判定定理吗？

我们知道，平行四边形的对角相等，反过来，对角相等的四边形是平行四边形吗？

如图 4－23，在四边形 $ABCD$ 中，

如果 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

那么 $\angle A+\angle B=\dfrac{360^\circ}{2}=180^\circ$.

$\therefore\ AD\parallel BC$.

同理 $AB\parallel CD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 因此得到：

平行四边形判定定理 1　两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

类似地，我们还会想到：两组对边分别相等的四边形是平行四边形吗？

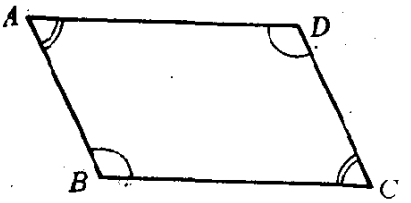


图　4－23

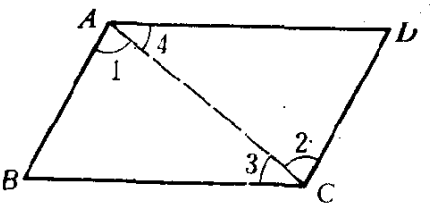


图　4－24

如图 4－24，如果 $AB=CD, BC=AD$，连结 AC，由 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，得 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，那么

$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. 于是得到:

平行四边形判定定理 2　两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

应用平行四边形判定定理 2, 我们来证明下面定理:

平行四边形判定定理 3　对角线互相平分的四边形是平行四边形.

已知: 如图 4－25, 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O, 并且 $AO=CO$, $BO=DO$.

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明: ∵　$AO=CO$,

$BO=DO$, $\angle 1=\angle 2$,

∴　$\triangle AOB \cong \triangle COD$.

∴　$AB=CD$.

同理　$AD=CB$.

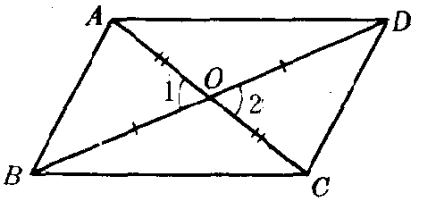


图　4－25

∴　四边形 $ABCD$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

例 1　已知: E、F 是 $\square ABCD$ 对角线 AC 上的两点, 并且 $AE=CF$ (图 4－26).

求证: 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

证明: 作对角线 BD, 交 AC 于点 O.

∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴　$AO=CO$, $BO=DO$.

∵ $AE=CF$，

∴ $EO=FO$.

又∵ $BO=DO$，

∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形(对角线互相平分的四边形是平行四边形).

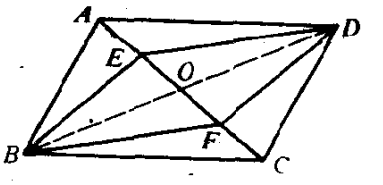
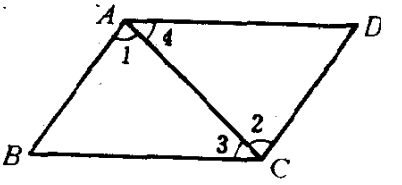


图 4－26

练 习

1. 已知:如图,$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$. 四边形 $ABCD$ 是不是平行四边形?为什么?



(第1题)

2. 延长 $\triangle ABC$ 的中线 AD 至 E，使 $DE=AD$. 求证:四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

在 $\square ABCD$ 中，由它的定义和性质可知，$AB\parallel CD$，且 $AB=CD$. "平行且相等"用符号"$\fallingdotseq$"表示. 如上面的 $AB\parallel CD$，$AB=CD$，可记作 $AB\fallingdotseq CD$，读作"AB 平行且等于 CD".

平行四边形还有下面判定定理:

平行四边形判定定理 4　一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

已知:在四边形 $ABCD$ 中，$AB\fallingdotseq CD$(图 4－27).

求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明:连结 AC.

∵ $AB \parallel CD$,

∴ $\angle 1 = \angle 2$.

∵ $AB = CD, AC = CA$,

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

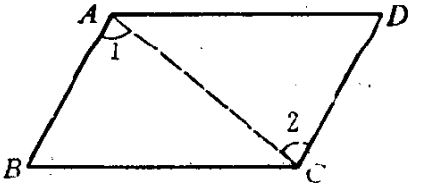


图 4－27

∴ $BC = AD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

想一想，还可以用其他方法证明上面定理吗?

例 2 已知: $\square ABCD$ 中，E、F 分别是边 AD、BC 的中点(图 4－28).

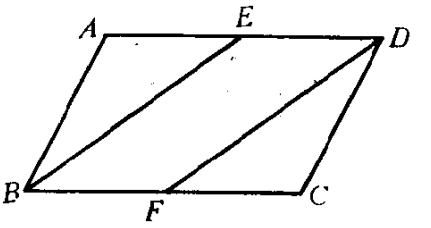
求证: $EB = DF$.

证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AD \parallel BC$.

∵ $ED = \frac{1}{2} AD$,

$BF = \frac{1}{2} BC$,



∴ $ED \parallel BF$.

图 4－28

∴ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

∴ $EB = DF$.

例 3 画平行四边形 $ABCD$，使 $\angle B=45°$，$AB=2$ cm，$BC=3$ cm．

画法：1．画 $\angle B=45°$（图 4－29）．

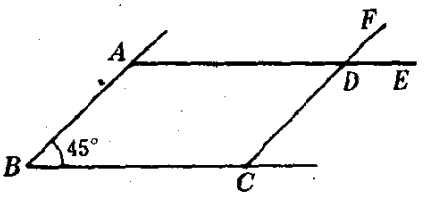


图 4－29

2．在 $\angle B$ 的两边上分别截取 $BA=2$ cm，$BC=3$ cm．

3．过 A、C 分别作 $AE\parallel BC$，$CF\parallel AB$，AE、CF 相交于点 D．

则四边形 $ABCD$ 为所求的平行四边形．

想一想，怎样根据判定定理 2、3、4 画出所求的 $\square ABCD$？

练　习

1. 如果横格纸的横线是互相平行的，在一条横线上截取线段 $AB=20$ mm，在另一条上截取 $CD=20$ mm，连结 AC、BD，那么四边形 $ACDB$ 是平行四边形．为什么？
2. 已知：$\square ABCD$，E 是 AB 的中点，F 是 CD 的中点．求证：$EF=BC$．
3. 画平行四边形 $ABCD$，使 $AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$AC=4$ cm．

习 题 4.2

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 平行四边形的边、角、对角线各有什么性质？这些性质是怎样证明的？

(2) 什么叫两条平行线的距离？它与两点的距离、点到直线的距离有什么区别和联系？

(3) 平行四边形有哪些判定定理？这些定理是怎样证明的？

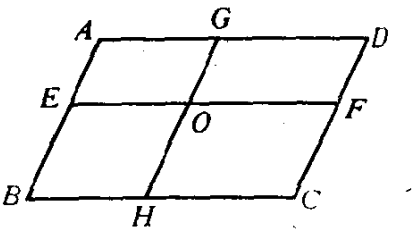
2. 填空：

(1) 如图，在$\square ABCD$中，

$EF \parallel BC$，$GH \parallel AB$，

EF、GH相交于点O.

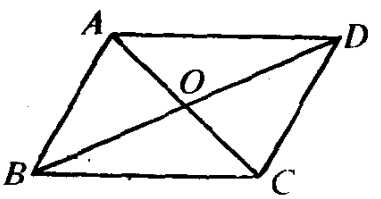
图中共有____个平行四边形；



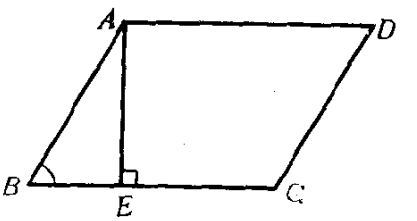
(第2(1)题)

(2) 在$\square ABCD$中，$\angle A + \angle C = 200°$，$\angle A =$____，$\angle B =$____；

(3) 在$\square ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O. 图中相等的线段有____，____，____，____；



(第2(3)题)



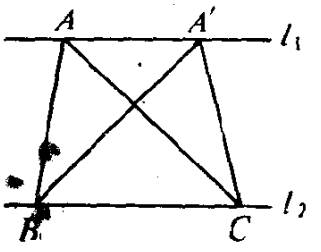
(第2(4)题)

(4) $\square ABCD$的周长为36 cm，$AB = 8$ cm，$BC =$____；

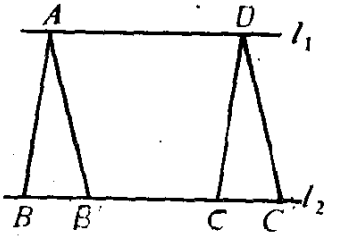
当$\angle B=60°$时，AD、BC的距离$AE=$____，$\square ABCD$的面积$S_{\square ABCD}=$_____.

3. 回答下列问题:

(1)如图,如果直线$l_1 // l_2$，那么$\triangle ABC$与$\triangle A'BC$的面积相等吗?为什么?



(第3(1)题)



(第3(2)题)

(2)如图，$\square ABCD$与$\square AB'C'D$有一条公共边AD，它们的对边在同一条直线上，这两个平行四边形的面积相等吗?为什么?

4. 已知:在$\square ABCD$中,$AE\perp BC$, $CF\perp AD$，E、F分别是垂足.求证:$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

5. 求证:平行四边形对角线的交点到一组对边的距离相等.

6. 求证:平行四边形一条对角线的两个端点到另一条对角线的距离相等.

7. 判断题:

(1)相邻的两个角都互补的四边形是平行四边形;（　　）

(2)两组对角分别相等的四边形是平行四边形;（　　）

(3)一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形;（　　）

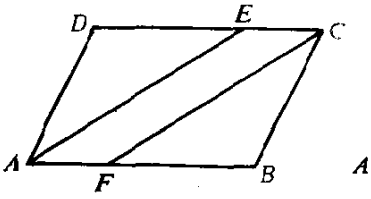
(4)一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;（　　）

(5)对角线相等的四边形是平行四边形;(　　)

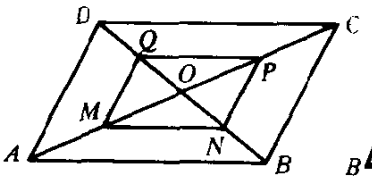
(6)对角线互相平分的四边形是平行四边形.(　　)

8. 求证:一组对边平行,一组对角相等的四边形是平行四边形.

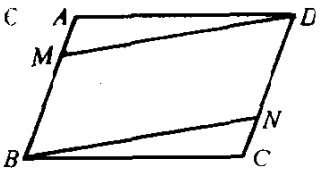
9. 已知:如图,在 $\square ABCD$ 中,AE、CF 分别是 $\angle DAB$、$\angle BCD$ 的平分线.求证:四边形 $AFCE$ 是平行四边形.



(第9题)



(第10题)

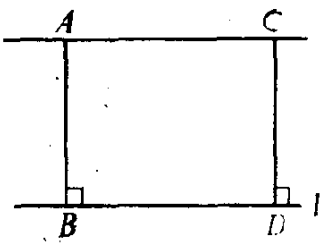


(第11题)

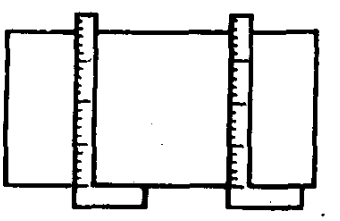
10. 已知:$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,M、N、P、Q 分别是 OA、OB、OC、OD 的中点.求证:四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.

11. 已知:如图,在 $\square ABCD$ 中,$AM=CN$.求证:四边形 $MBND$ 是平行四边形.

12. (1)已知 A、C 是直线 l 同旁的两点,$AB\perp l$,$CD\perp l$,垂足分别是 B、D,且 $AB=CD$.求证:$AC\parallel l$(图(1));



(1)

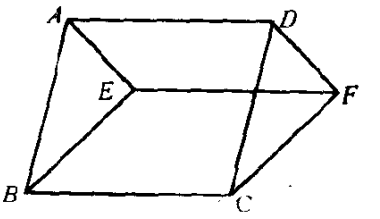


(2)

(第12题)

(2)如果一块木板两边是线段,把两把曲尺的一边紧靠木板边缘,再看木板另一边缘对曲尺另一边上刻度是否相等,就可以判断木板的两个边缘是否平行.为什么(图(2))?

13. 已知:如图,四边形 $AEFD$ 和 $EBCF$ 都是平行四边形.求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(第13题)

14. (1)画 $\square ABCD$,使 $AB=3\text{ cm}$, $BC=5\text{ cm}$, $\angle ABC=60°$;

(2)已知线段 $AB=3\text{ cm}$,以线段 AB 为一条对角线,直线 AB 外的一点 P 为一个顶点画平行四边形.

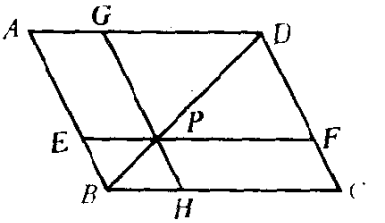
B 组

1. 已知三条线段的长分别为 22 cm、16 cm、18 cm.以哪两条为对角线,其余一条为一边,可以画出平行四边形?

2. 已知线段 $a=10\text{ cm}$, $b=14\text{ cm}$, $c=8\text{ cm}$.以其中两条为边,另一条为对角线画平行四边形,可以画几个形状不同的平行四边形?

3. 一组对边相等,一组对角相等的四边形是平行四边形吗?为什么?

4. 如图,在 $\square ABCD$ 中, $EF/\!/BC$, $GH/\!/AB$, EF、GH 的交点 P 在 BD 上,图中哪两个平行四边形的面积相等?为什么?



(第4题)

4.5 矩形、菱形

矩形、菱形都是特殊的平行四边形.

1. 矩形

如图 4－30，有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**(通常也叫长方形).矩形是我们最常见的图形之一，如书桌面、课本的封面等都有矩形形象.

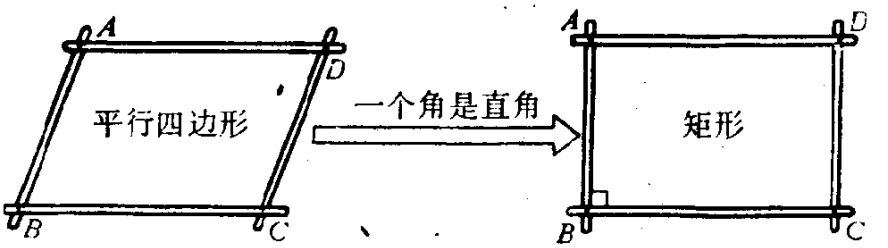


图 4－30

因为矩形是有一个角为直角的平行四边形，所以，由平行四边形角的性质可得:

矩形性质定理 1　矩形的四个角都是直角.

由矩形的四个角都是直角，可以证明矩形还有下面性质:

矩形性质定理 2　矩形的对角线相等.

已知: 矩形 $ABCD$ (图 4－31).

求证: $AC=DB$.

证明: 在矩形 $ABCD$ 中，

∵ $\angle ABC=\angle DCB=90°$ (矩形的四个角都是直角).

$AB=DC$，

$BC=CB$，

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle DCB$.

$\therefore\ AC=DB$.

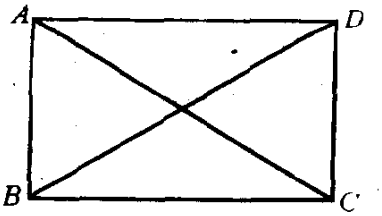


图 4－31

由矩形性质定理 2，我们可以得到：

推论　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例 1　已知：如图4－32 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，$\angle AOD=120°$，$AB=4\text{ cm}$．求矩形对角线的长.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore\ AC=BD$(矩形的对角线相等).

又∵ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，

$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，

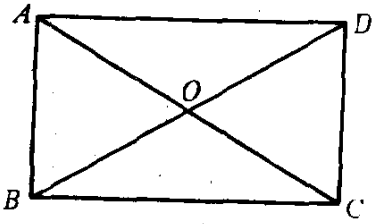


图 4－32

$\therefore\ OA=OD$.

∵ $\angle AOD=120°$，

$\therefore\ \angle ODA=\angle OAD=\frac{180°-120°}{2}=30°$.

又∵ $\angle DAB=90°$(矩形的四个角都是直角)，

$\therefore\ BD=2AB=2\times4\text{ cm}=8\text{ cm}$.

练　习

1. 证明矩形性质定理 1.
2. 已知矩形的一条对角线长为 8 cm，两条对角线的一个交角为 60°. 求矩形的边长.
3. 证明矩形性质定理 2 的推论.
4. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2AC$. 求$\angle A$、$\angle B$ 的度数.

要判定一个四边形是矩形，除了根据定义判定外，还可以根据下面定理:

矩形判定定理 1　有三个角是直角的四边形是矩形.

矩形判定定理 2　对角线相等的平行四边形是矩形.

已知: 在$\square ABCD$中，$AC=DB$ (图4－31).

求证: $\square ABCD$是矩形.

证明: ∵　$AC=DB$, $BC=CB$, $AB=DC$,

∴　$\triangle ABC\cong\triangle DCB$.

∴　$\angle ABC=\angle DCB$.

又∵　$AB\parallel DC$,

∴　$\angle ABC+\angle DCB=180°$.

∴　$\angle ABC=90°$.

∴　$\square ABCD$是矩形.

工人师傅在做门框或矩形零件时，常用测量平行四边形的两条对角线是否相等来检查直角的精度，就是根据这个定理.

例 2 已知$\square ABCD$的对角线 AC、BD 相交于点 O，$\triangle AOB$ 是等边三角形，$AB=4\text{ cm}$，求这个平行四边形的面积(图 4－32).

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$.

∵ $AO=BO$，

∴ $AC=BD$.

∴ $\square ABCD$ 是矩形(对角线相等的平行四边形是矩形).

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

∵ $AB=4\text{ cm}$，$AC=2AO=8\text{ cm}$，

∴ $BC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ (cm).

∴ $S_{\square ABCD}=AB\cdot BC=4\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ (cm^2).

练　习

1. 求证：四个角都相等的四边形是矩形.
2. 怎样用刻度尺检查一个四边形零件是不是矩形.

2. 菱形

如图 4－33，有一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**．菱形也是我们常见的图形，想一想，你在什么地方见到过菱形形象．

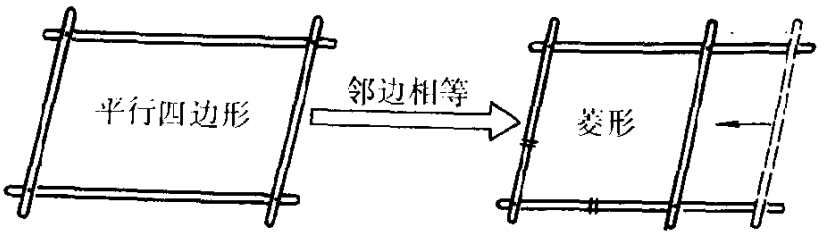


图　4－33

由于菱形是有一组邻边相等的平行四边形，所以，根据平行四边形对边相等的性质，可以得到：

菱形性质定理 1　菱形的四条边都相等．

由菱形的四条边都相等，可以证明菱形还有下面性质：

菱形性质定理 2　菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角．

已知：菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O (图4－34)．

求证：$AC \perp BD$；AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$；BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$．

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AB = AD$ (菱形的四条边都相等)．

在等腰 $\triangle ABD$ 中，

∵ $BO=OD$,

∴ $AC\perp BD$, AC 平分$\angle BAD$.

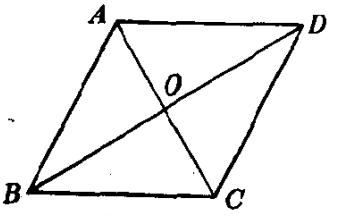


图 4－34

同理 AC 平分$\angle BCD$；BD 平分$\angle ABC$ 和$\angle ADC$.

如图 4－34，菱形 $ABCD$ 被对角线 AC，BD 分成四个全等的直角三角形. 它们的底和高都分别是两条对角线的一半，利用三角形的面积公式可得，菱形的面积等于它的两条对角线长的积的一半.

如果菱形的两条对角线长分别为 a、b，则菱形的面积

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b.$$

例3 已知：如图4－35，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\parallel AC$ 交 AB 于 E，$DF\parallel AB$ 交 AC 于 F.

求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.

证明：∵ $DE\parallel AF$, $DF\parallel AE$,

∴ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

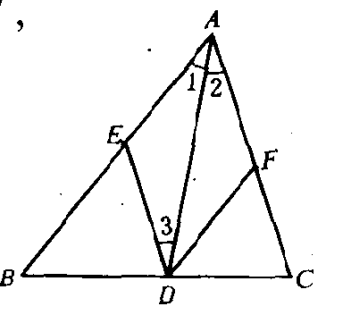


图 4－35

∵ $\angle 1=\angle 2$, $\angle 2=\angle 3$,

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $AE=ED$.

∴ $\square AEDF$ 是菱形.

例 4 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2 cm，$\angle BAD=120°$. 对角线 AC、BD 相交于点 O(图 4－36). 求这个菱形的对角线长和面积.

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore\ AC\perp BD,\ \angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\times 120°=60°$$

(菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角).

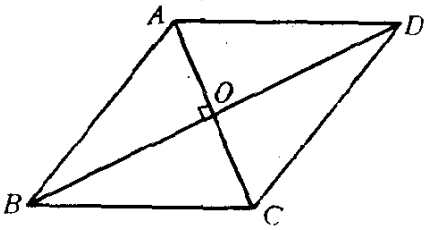


图 4－36

在 Rt$\triangle AOB$ 中，

∵ $\angle ABO=90°-\angle BAO=30°$,

$$\therefore\ AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 2=1.$$

$$BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

∵ $AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，

$$\therefore\ AC=2AO=2\ (\text{cm}),\ BD=2BO=2\sqrt{3}\ (\text{cm}),$$

$$S_{\text{菱形}ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

练　习

1. (口答)矩形、菱形各具有哪些性质?
2. 证明菱形性质定理 1.
3. 已知菱形的两条对角线长分别是 6cm 和 8cm，求菱形的周长和面积.

要判定一个四边形是菱形，除根据定义判定外，还有下面判定定理：

菱形判定定理 1　四边都相等的四边形是菱形.

菱形判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

下面，我们来证明判定定理 2.

已知：$\square ABCD$ 中，对角线 $AC \perp BD$（图 4－37）.

求证：$\square ABCD$ 是菱形.

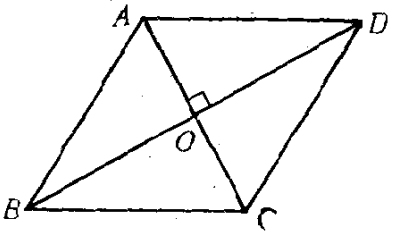


图　4－37

证明：∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$OB = OD$.

又∵　$AC \perp BD$，垂足为 O，

∴　$AB = AD$.

∴　$\square ABCD$ 是菱形.

例 5　已知：$\square ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线与边 AD、BC 分别交于 E、F（图4－38）.

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.

证明：∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AE \parallel FC$.

∴　$\angle 1 = \angle 2$.

又∵　$\angle AOE = \angle COF$，

$AO = CO$，

∴　$\triangle AOE \cong \triangle COF$.

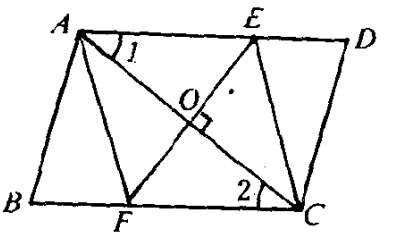


图　4－38

∴　$EO=FO$.

∴　四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

又∵ $EF\perp AC$,

∴　$\square AFCE$是菱形(对角线互相垂直的平行四边形是菱形).

想一想，利用菱形判定定理 1，怎样证明例 4 中的四边形 $AFCE$ 是菱形.

练　习

1. 填空:

(1)对角线互相垂直平分的四边形是 _____;

(2)对角线相等且互相平分的四边形是 _____.

2. 证明菱形判定定理 1.

3. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 6 cm、8 cm.

做　一　做

设计一个由菱形组成的花边图案.花边的长为 15 cm，宽为 4 cm，由有一条对角线在同一条直线上的四个菱形组成，前一个菱形对角线的交点，是后一个菱形的一个顶点. 画出花边图形.

4.6 正方形

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做**正方形**.

由正方形的定义可以得知，正方形既是有一组邻边相等的矩形，又是有一个角是直角的菱形(图 4－39).

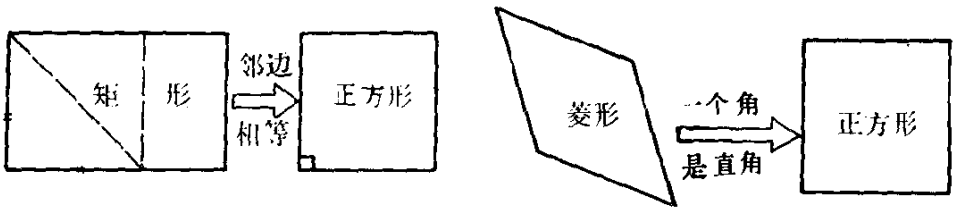


图 4－39

所以，正方形具有矩形的性质，同时又具有菱形的性质.由矩形和菱形的性质，可知正方形具有下面性质:

正方形性质定理 1 正方形的四个角都是直角，四条边都相等.

正方形性质定理 2 正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每条对角线平分一组对角.

例 1 求证: 正方形的两条对角线把正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

已知: 四边形 $ABCD$ 是正方形，对角线 AC、BD 相交于点 O(图 4－40).

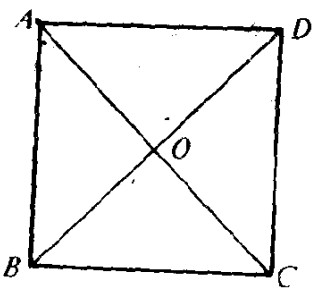


图 4－40

求证: $\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$ 是全等的

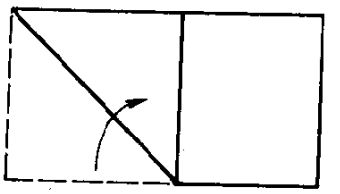
等腰直角三角形.

证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AC=BD$, $AC\perp BD$, $AO=CO=BO=DO$ (正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分).

∴ $\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形，并且$\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DAO$.

练　习



(第1题)

1. 解答第一册引言中的问题3:把一张长方形纸片如图那样折一下,可以裁出正方形纸片. 这是为什么呢? 如果是长方形木板，又怎样从中截出最大的正方形木板呢?
2. 已知正方形的一条边长为2 cm，求这个正方形的周长、对角线长和正方形的面积.
3. 正方形的对角线和它的边所成的角是多少度? 为什么?
4. 已知正方形的一条对角线长为4 cm，求它的边长和面积.

矩形、菱形、正方形都是平行四边形，但它们都是有特殊条件的平行四边形. 正方形不仅是特殊的平行四边形，而且是邻边

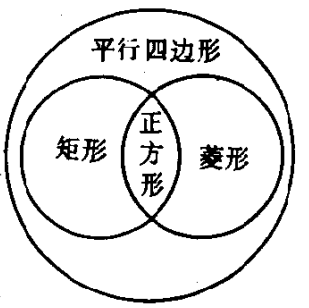


图　4-41

相等的特殊矩形，也是有一个角是直角的特殊菱形，它们的包含关系如图 4－41.

怎样判定一个四边形是正方形呢？可以先判定四边形是矩形，再判定这个矩形也是菱形；或者先判定四边形是菱形，再判定这个菱形是矩形.

例 2 已知：如图4－42，点 A'、B'、C'、D'分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，并且 $AA'=BB'=CC'=DD'$.

求证：四边形 $A'B'C'D'$ 是正方形.

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，、

∴ $AB=BC=CD=DA$

(正方形的四条边都相等).

又∵ $AA'=BB'=CC'=DD'$,

∴ $D'A=A'B=B'C=C'D$.

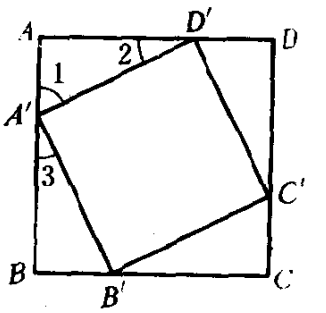


图 4－42

∵ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$(正方形的四个角都是直角)，

∴ $\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$.

∴ $D'A'=A'B'=B'C'=C'D'$.

∴ 四边形 $A'B'C'D'$ 是菱形(四边都相等的四边形是菱形).

又∵ $\angle 2=\angle 3$，$\angle 1+\angle 2=90°$，

$\therefore\ \angle 1+\angle 3=90°$.

$\because\ \angle D'A'B'=180°-(\angle 1+\angle 3)=90°$,

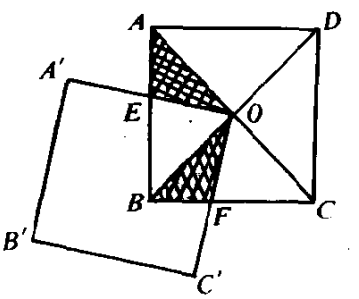
$\therefore$ 四边形$A'B'C'D'$是正方形(有一个角是直角的菱形是正方形).

练　习

1. 两条对角线互相垂直平分且相等的四边形是哪种四边形？为什么？
2. 如果一个菱形的两条对角线相等，那么它一定是正方形. 为什么？
3. 如果一个矩形的两条对角线互相垂直，那么它一定是正方形. 为什么？
4. (1)以 2 cm 长的线段为边，画一个正方形；
   (2)以 4 cm 长的线段为对角线，画一个正方形.

想一想

如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O. 点O是正方形$A'B'C'O$的一个顶点. 如果两个正方形的边长相等，那么正方形$A'B'C'O$绕点O无论怎样转动，两个正方形重叠部分的面积，总等于一个正方形面积的$\frac{1}{4}$，想一想，为什么？



习 题 4.3

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)矩形、菱形各是怎样的特殊平行四边形？它们各比平行四边形多些什么性质？是怎样证明的？

(2)矩形、菱形各有哪些判定定理？是怎样证明的？

(3)正方形是怎样的特殊平行四边形？正方形与矩形、菱形有什么关系？正方形有什么性质？怎样判定一个四边形是正方形？

2. 已知：$\triangle ABC$ 的两条高为 BE、CF，M 为 BC 的中点.

求证：$ME=MF$.

3. 求证：对角线互相平分并且相等的四边形是矩形.

4. 求证：两条平行线被第三条直线所截，两组内错角的平分线相交所成的四边形是矩形.

5. (1)以 2 cm 和3 cm 为两条邻边长画一个矩形，并求它的对角线长.

(2)以 8 cm 长的线段为对角线，使两条对角线的一个交角为 60 °画矩形，并求这个矩形的面积.

6. 已知菱形的周长为 20 cm，两个相邻的角的度数的比为 1 :2，求较短的对角线长.

7. 求证：菱形对角线交点到各边距离相等.

8. (1) 从菱形的钝角的顶点向对边引垂线，如果垂线平分对边，求菱形各角的度数.

(2) 求证：如果菱形的一个角是 120°，那么从这个角的顶点向对角的两边所引两条垂线分别平分这两边.

9. 求证：有一条对角线平分一个内角的平行四边形是菱形.

10. 在 $\square ABCD$ 中，$\angle A$ 的平分线与 BC 边相交于点 E，$\angle B$ 的平分线与 AD 边相交于点 F. 求证：四边形 $ABEF$ 是菱形.

11. 画菱形 $ABCD$，使 $AC=50\ \text{mm}$，$\angle BAD=60°$.

12. 求证：正方形对边中点的连线将正方形分成四个小正方形.

13. 判断题：

(1) 对角线相等的四边形是矩形；（　　）

(2) 对角线互相垂直的四边形是菱形；（　　）

(3) 对角线相等且互相垂直的四边形是正方形.（　　）

14. 求证：依次连结正方形各边中点所成的四边形为正方形.

15. 选择题：

在四边形 $ABCD$ 中，O 是对角线的交点，能判定这个四边形是正方形的是(　　)

$(A)\ AC=BD$，$AB \underline{/\!/} CD$.

$(B)\ AD/\!/BC$，$\angle A=\angle C$.

$(C)\ AO=BO=CO=DO$，$AC\perp BD$.

$(D)\ AO=CO$，$BO=DO$，$AB=BC$.

B 组

1. 求证：矩形的各内角平分线组成的四边形是正方形.

完美的正方形

读一读

我们学习了平行四边形、矩形、菱形和正方形，比较一下，哪一种图形的性质最多呢？无疑是正方形.

正方形有相等的角，相等的边，相等且互相垂直平分的对角线，它是对称轴比任何四边形都多的轴对称图形，以后我们还会学到，正方形还是中心对称图形. 这些性质使正方形获得了人们的喜爱和广泛的应用.

例如，人们用边长为单位长度的正方形的面积，作为度量其他图形面积的基本单位. 人们也喜欢用正方形图案美化生活环境. 比如，用正方形的水磨石或地板砖铺室内地面，不仅使人感到美观大方，而且施工简单易行.

在人们的实践活动中，还发现了正方形许多奇妙的性质. 例如，正方形的周长比与它等面积的任何矩形的周长都短. 反过来，正方形的面积比与它等周长的任何矩形的面积都大. 于是人们用这些性质指导实践活动. 比如，要用砖墙或篱笆围一块面积一定的矩形地块时，都尽可能围成正方形，这样可以节省材料.

你不妨做一个实验，画一个周长为 20 cm 的矩形，使它的一边长为：(1) 3 cm；(2) 5 cm；(3) 6 cm，算一下哪一个矩形的面积最大？

4.7 中心对称和中心对称图形

在前一章，我们学过关于直线对称的图形．在日常生活和工农业生产中，还会遇到关于点对称的图形．例如，飞机的螺旋桨，风车的风轮等，就是关于一点对称的图形的实例(图 4－43)．它们的每个叶片转动 180° 后，都转到与它相对的叶片的位置．

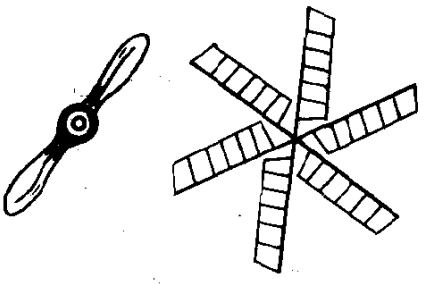


图 4－43

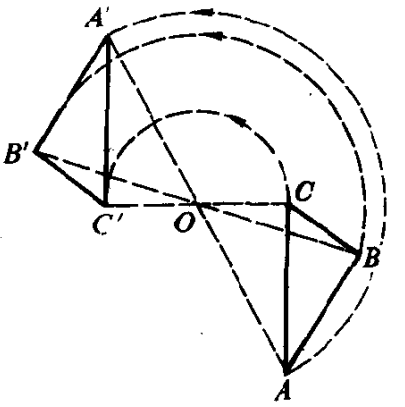


图 4－44

把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形**关于这个点对称**．这个点叫做**对称中心**．两个图形关于点对称也称**中心对称**．这两个图形中的对应点叫做关于中心的**对称点**．

例如，图 4－44 的 $\triangle ABC$ 绕点 O 旋转 180° 后，它就和 $\triangle A'B'C'$ 重合，因此，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 对称，点 O 是对称中心，对应点 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C' 是关于中心 O 的对称点．

从定义可知，中心对称是指两个图形之间的形状与位置关系，具有这种关系的两个图形有些特殊性质.

因为关于中心对称的两个图形可以重合，因此得：

定理 1　关于中心对称的两个图形是全等形.

如图 4－44，在中心对称的两个图形中，对称点 A、A'，B、B'，C、C' 都分别和对称中心 O 在一条直线上，并且 $OA=OA'$，$OB=OB'$，$OC=OC'$. 由此得到下面性质：

定理 2　关于中心对称的两个图形，对称点连线都经过对称中心，并且被对称中心平分.

定理 2 的逆命题也成立.

逆定理　如果两个图形的对应点连线都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形关于这一点对称.

我们有时用它来判定两个图形关于一点对称.

例　已知四边形 $ABCD$ 和点 O（图4－45），画四边形 $A'B'C'D'$，使它与已知四边形关于点 O 对称.

分析：要画四边形 $ABCD$ 关于点 O 的对称图形，只要画 A、B、C、D 四点关于点 O 的对称点，再顺次连结各点即可.

画法：1. 连结 AO 并延长到 A'，使 $OA'=OA$，得到点 A 的对称点 A'.

2. 同样画 B、C、D 的对称点 B'、C'、D'.

3. 顺次连结 A'、B'、C'、D'各点.

四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求的四边形.

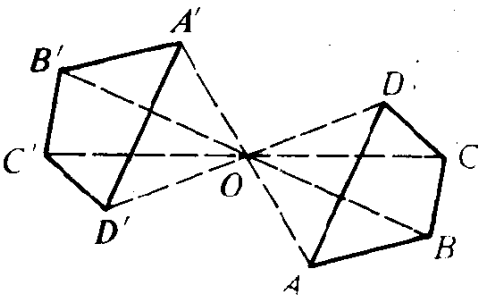


图 4－45

练 习

1. 画：(1) 已知点 A 关于点 O 的对称点；

(2) 已知线段 AB 关于点 O 的对称线段；

(3) 已知 $\triangle ABC$ 关于点 O 的对称三角形.

2. 判断下面说法是否正确：

(1) 平行四边形的对角顶点关于对角线交点对称；

(2) 平行四边形的对边关于对角线交点对称.

把一个图形绕某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够和原来的图形互相重合，那么这个图形叫做**中心对称图形**，这个点就是它的对称中心.

例如，线段绕它的中点旋转 180°后，它的两个端点互换了位置，旋转后的线段和原线段重合，因此，线段是中心对称图形，线段的中点是它的对称中心(图 4－46).

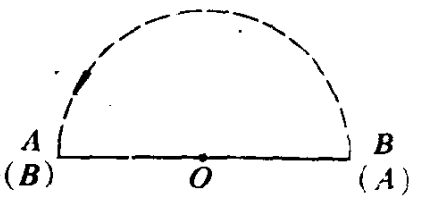


图 4－46

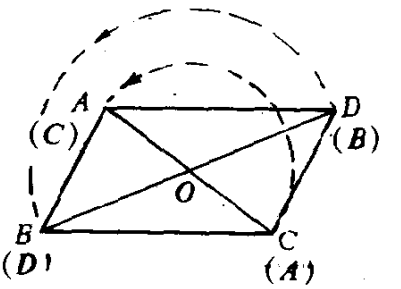


图 4－47

又如图 4－47 中的 $\square ABCD$，点 O 是对角线的交点，因为 $OA=OC, OB=OD$，所以图形绕点 O 旋转 180°后，点 A 与点 C，点 B 与点 D 分别互换了位置，旋转后的图形和原来的图形重合. 因此，平行四边形是中心对称图形，对角线的交点是它的对称中心.

矩形、菱形、正方形都是中心对称图形. 这些图形不仅是中心对称图形，同时还是轴对称图形，它们的对称轴如图 4－48. 对称轴的交点是对称中心.

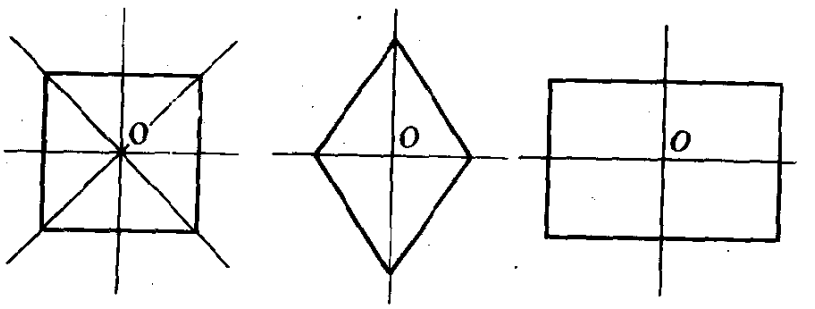


图 4－48

注意 中心对称是对两个图形说的，它表示两个图形之间的对称关系. 中心对称图形是对一个图形说的，它表示某个图形的特性. 注意这两者之间的联系和区别.

因为中心对称图形形状匀称美观，所以很多建筑物和工艺品上常用这种图形作装饰图案(图 4－49).

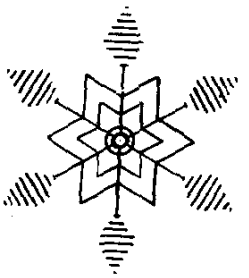


图 4－49

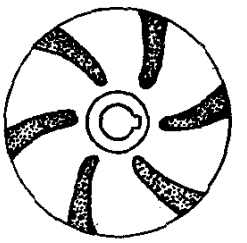


图 4－50

又因为具有中心对称图形形状的物体，能够在所在平面内绕对称中心平稳地旋转，所以在生产中旋转的零部件的形状常设计成中心对称图形，如水泵叶轮等(图 4－50).

练 习

1. 举出几个中心对称图形的实例.
2. 线段、射线、两条相交直线，是不是中心对称图形？如果是，指出对称中心的位置.
3. 等边三角形，五角星是不是中心对称图形？为什么？

习 题 4.4

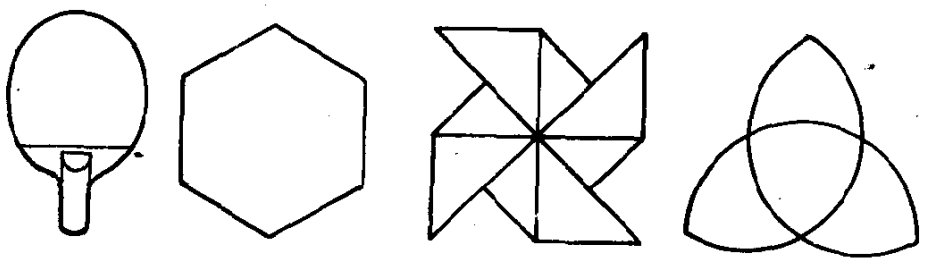
A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)什么样的两个图形叫做成中心对称？成中心对称的两个图形有什么性质？

(2)怎样的图形叫中心对称图形？中心对称与中心对称图形有什么区别和联系？

2. 下列图形中，哪些是中心对称图形？哪些是轴对称图形？画出它们的对称中心或所有的对称轴.



(1) (2) (3) (4)

(第 2 题)

3. 画一个与已知四边形 $ABCD$ 成中心对称的四边形.

(1)以顶点 A 为对称中心；

(2)以 BC 边的中点 O 为对称中心.

4. 画已知线段 AB 关于点 O (不在 AB 上)的对称线段 $A'B'$. 再画 $A'B'$ 关于点 O' (不在 $A'B'$ 上)的对称线段 $A''B''$. 并证明：$A''B'' \parallel\!\!= AB$.

三　梯形

4.8　梯形

前面，我们研究的平行四边形是两组对边分别平行的特殊四边形．现在，我们研究只有一组对边平行的另一种特殊四边形(4－51)．

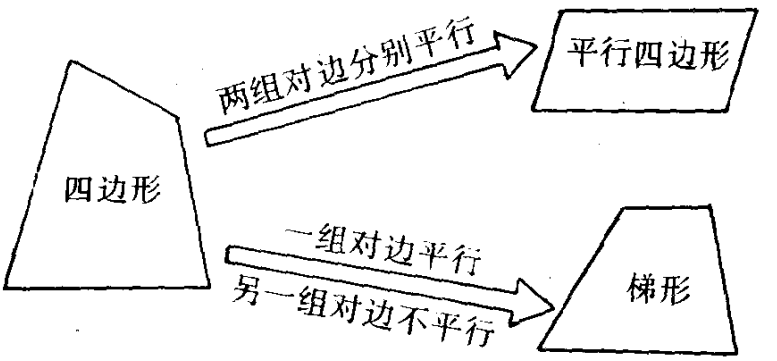


图　4－51

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做**梯形**(图4－52)．平行的两边叫做**梯形的底**(通常把较短的底叫做上底，较长的底叫做下底)，不平行的两边叫做**梯形的腰**，两底的距离叫做**梯形的高**．

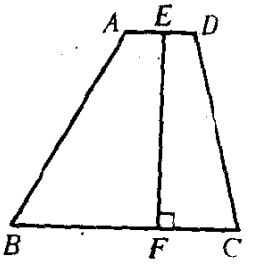


图　4－52

一腰垂直于底的梯形叫做**直角梯形**(图 4－53).
两腰相等的梯形叫做**等腰梯形**(图 4－54).

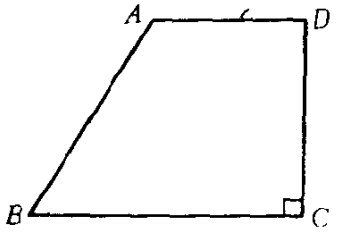


图 4－53

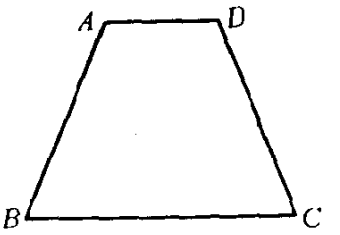


图 4－54

直角梯形和等腰梯形都是特殊的梯形(4－55).

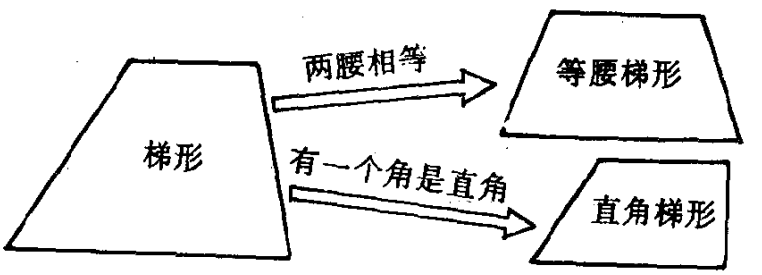


图 4－55

下面研究等腰梯形的性质.

等腰梯形性质定理　等腰梯形在同一底上的两个角相等.

已知: 如图 4－56, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$.

求证: $\angle B = \angle C$.

分析: 我们学过“等腰三角形两底角相等”. 如果能将等腰梯形在同一底上的两个角, 转化成等腰三角形的两个底角, 定理就容易证明了.

证明：过点 D 作 $DE \parallel AB$，交 BC 于点 E，得到 $\triangle DEC$.

$\because$ $AD \parallel BC$，$DE \parallel AB$，

$\therefore$ $AB = DE$.

$\because$ $AB = DC$，

$\therefore$ $DE = DC$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle C$.

$\because$ $\angle 1 = \angle B$，

$\therefore$ $\angle B = \angle C$.

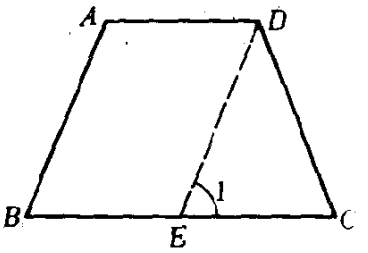


图 4－56

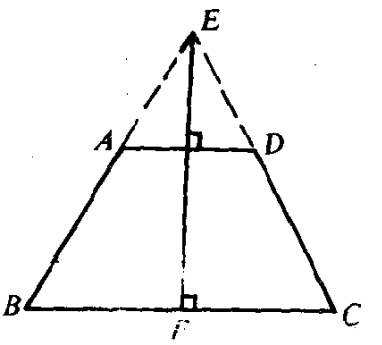


图 4－57

如图 4－57，延长等腰梯形的两腰相交于点 E. 由 $\angle B = \angle C$，$AD \parallel BC$，可知 $\triangle EBC$ 和 $\triangle EAD$ 都是等腰三角形. 因此从 E 作两底的垂线平分两底. 根据等腰三角形是轴对称图形，可得等腰梯形是轴对称图形，过两底中点的直线是它的对称轴.

例 1 求证：**等腰梯形的两条对角线相等.**

已知:在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = DC$ (图 4－58).

求证: $AC = DB$.

证明: 在梯形 $ABCD$ 中,

$\because$ $AB = DC$,

$\therefore$ $\angle ABC = \angle DCB$ (等腰梯形在同一底上的两个角相等).

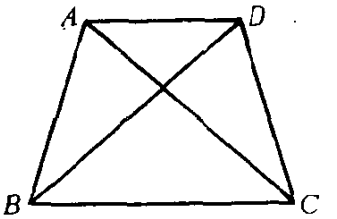


图 4－58

又$\because$ $BC = CB$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore$ $AC = DB$.

练 习

1. 在图 4－52 中,指出梯形的上、下底和腰,并量出梯形的高.
2. (口答)一个四边形有一组对边平行但不相等,它是梯形吗?为什么?
3. 求证: 等腰梯形上底的中点与下底两端点距离相等.

前面,我们用等腰三角形的性质定理，证明了等腰梯形的性质定理.也可以利用等腰三角形的判定定理,证明等腰梯形有下面判定定理:

等腰梯形判定定理　在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形.

例 2 求证：对角线相等的梯形是等腰梯形.

已知：在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AC = BD$（图 4－59）.

求证：$AB = DC$.

分析：在$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，已有两边对应相等，只要能证明$\angle 1 = \angle 2$，就可以通过证明$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ 得到 $AB = DC$. 我们设法利用已知 $AC = BD$ 来构造等腰三角形，应用等腰三角形的性质证明$\angle 1 = \angle 2$.

证明：过点 D 作 $DE \parallel AC$，交 BC 的延长线于 E，得$\square ACED$，所以 $DE = AC$.

$\because$ $AC = BD$，

$\therefore$ $DE = BD$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle E$.

$\because$ $\angle 2 = \angle E$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.

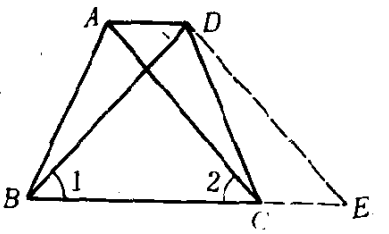


图 4－59

又$\because$ $AC = DB$，$BC = CB$，

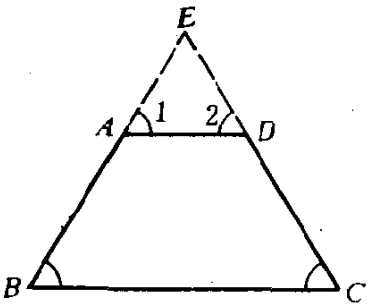
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore$ $AB = DC$.

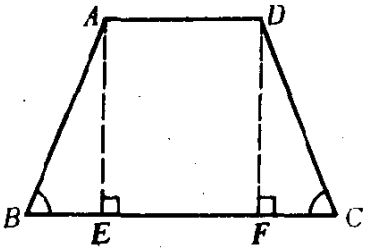
练 习

1. 用下面方法证明等腰梯形的判定定理：

(1) 如图，分别延长梯形 $ABCD$ 的腰 BA、CD，设它们相交于点 E. 通过证明 $\triangle EAD$ 和 $\triangle EBC$ 都是等腰三角形，来证明定理.



(第1(1)题)



(第1(2)题)

(2) 如图，作梯形 $ABCD$ 的高 AE、DF. 通过证明 $\mathrm{Rt}\triangle ABE \cong \mathrm{Rt}\triangle DCF$ 来证明定理.

2. 画一个等腰梯形，使它的上、下底长分别为 5 cm、11 cm，高为 4 cm，并计算这个等腰梯形的周长和面积.

想一想

在研究等腰梯形时，常常通过辅助线，使等腰梯形与等腰三角形联系起来. 想一想，用怎样的辅助线可以在等腰梯形中划出等腰三角形.

习 题 4.5

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：
   (1)什么样的四边形叫梯形？怎样的梯形是直角梯形？怎样的梯形是等腰梯形？
   (2)等腰梯形有什么性质？怎样判定一个梯形是等腰梯形？
   (3)在研究梯形问题时，可以引什么样的辅助线？
2. 已知等腰梯形的一个锐角是 75°. 求其他三个角各是多少度.
3. 已知等腰梯形的锐角等于 60°，它的两底分别为 15 cm，49 cm. 求它的腰长.
4. 已知直角梯形的一腰长 10 cm，这条腰和一个底所成的角是 30°. 求另一条腰的长.
5. 画梯形 $ABCD$，使底 $AD=3$ cm，$BC=6$ cm，腰 $AB=4$ cm，$\angle B=60°$.
6. 画等腰梯形 $ABCD$，使底 $AD=3$ cm，$BC=6$ cm，$\angle B=60°$.

B 组

1. 已知等腰梯形 $ABCD$，$AD\parallel BC$，对角线 $AC\perp BD$，$AD=3$ cm，$BC=7$ cm. 求梯形的面积 S.
2. 若以 14 cm、9 cm 为底，13 cm、7 cm 为腰画梯形，这个梯形能不能画出来？为什么？

4.9 平行线等分线段定理

怎样任意等分一条线段呢?我们先做下面一个实验.

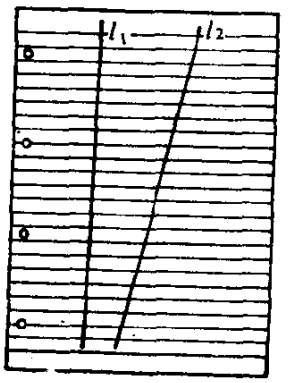


图 4－60

如图 4－60,如果横格纸上的横线是互相平行的,并且每相邻两条横线的距离都相等,那么与横线垂直的竖线 l_1 被截出一组相等的线段．在横格纸上任意画一条直线 l_2,可以发现:它被横线分成的各条线段也是相等的.

平行线等分线段定理　如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等.

我们以 3 条平行线为例来证明上述定理.

已知:如图 4－61,直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB=BC$.

求证: $A_1B_1=B_1C_1$.

证明: 过 B_1 作 $EF \parallel AC$,分别交 l_1、l_3 于点 E、F.得到 $\square ABB_1E$ 和 $\square BCFB_1$.

$\therefore$ $AB=EB_1$, $BC=B_1F$.

$\because$ $AB=BC$,

$\therefore$ $EB_1=B_1F$.

又$\because$ $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$,

$\therefore$ $\triangle A_1B_1E \cong \triangle C_1B_1F$.

$\therefore$ $A_1B_1=B_1C_1$.

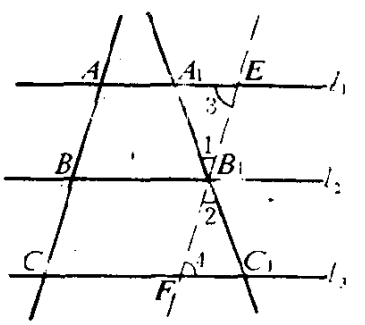


图 4－61

如图 4－62，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$．在梯形 $ABCD$ 中，如果 $AE=EB$，那么由上面定理得 $DF=FC$，因此得：

推论 1　经过梯形一腰的中点与底平行的直线，必平分另一腰.

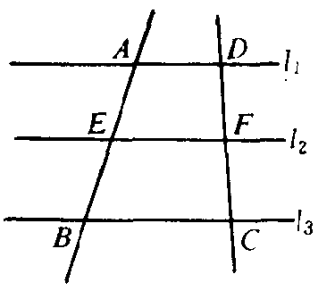


图　4－62

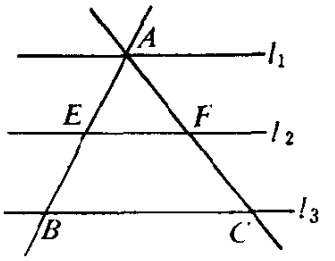


图　4－63

如图 4－63，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$．在$\triangle ABC$ 中，如果 $AE=EB$，那么 $AF=FC$，因此得：

推论 2　经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边.

应用平行线等分线段定理，我们可以任意等分一条线段.

例　已知：线段 AB（图 4－64）.

求作：线段 AB 的五等分点.

作法：1. 作射线 AC.

2. 在射线 AC 上以任意长顺次截取 $AD=DE=EF=FG=GH$.

3. 连结 HB.

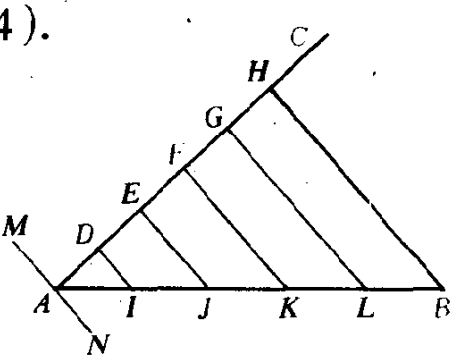


图　4－64

4. 过点 G、F、E、D 分别作 HB 的平行线 GL、FK、EJ、DI，分别交 AB 于点 L、K、J、I.

I、J、K、L 就是所求的五等分点.

证明：过点 A 作 $MN \parallel HB$.

$\because$ $MN \parallel DI \parallel EJ \parallel FK \parallel GL \parallel HB$,

$AD = DE = EF = FG = GH$,

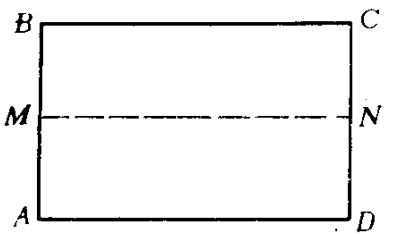
$\therefore$ $AI = IJ = JK = KL = LB$（平行线等分线段定理）.

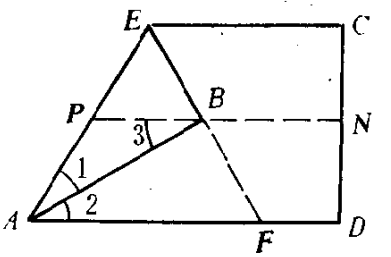
练　习

1. 练习本上的横格是平行且等距的，用横格将 10 cm 长的线绳五等分、七等分，分别用不同色笔在绳上画上等分点.
2. 画出一条线段，用作平行线的方法将它三等分.

做一做

用一张矩形纸，你能折出一个等边三角形吗？如图，先把矩形 $ABCD$ 纸对折，设折痕为 MN；再把 B 点叠在折痕线上，得到 Rt$\triangle ABE$，沿着 EB 线折叠，就能得到等边 $\triangle EAF$. 想一想，为什么？





4.10 三角形、梯形的中位线

连结三角形两边中点的线段叫做**三角形的中位线**.

注意 三角形的中位线和三角形的中线不同.

下面，我们来研究三角形中位线的性质.

如图 4－65，DE 是$\triangle ABC$ 的一条中位线. 如果过 D 作 $DE' /\!/ BC$，交 AC 于 E'，那么根据平行线等分线段定理推论 2，E'是 AC 的中点，可见DE'与 DE 重合，因此 $DE /\!/ BC$.

同样，过 D 作 $DF /\!/ AC$，交 BC 于 F，则 $BF=FC$.

∵ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形，

∴ $DE=FC$.

∵ $FC=\frac{1}{2}BC$，

∴ $DE=\frac{1}{2}BC$. 因此得：

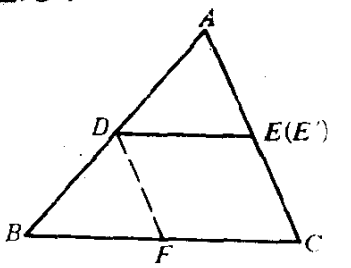


图 4－65

三角形中位线定理 **三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半.**

例 1 求证：顺次连结四边形四条边的中点，所得的四边形是平行四边形.

已知：如图 4－66，在四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：连结 AC.

$\because$ $AH=HD, CG=GD$,

$\therefore$ $HG \parallel AC, HG=\frac{1}{2}AC$

(三角形中位线定理).

同理 $EF \parallel AC$, $EF=\frac{1}{2}AC$.

$\therefore$ $HG \parallel EF$.

所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

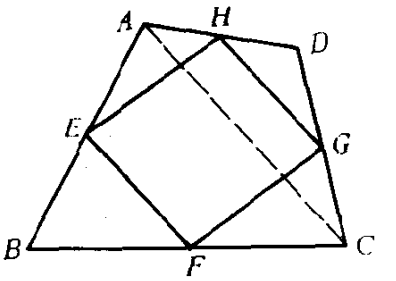
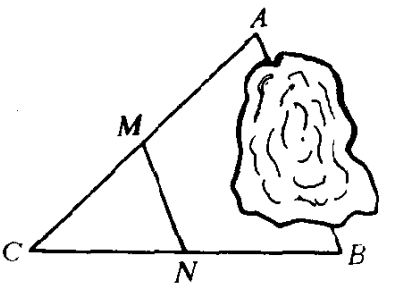


图 4－66

练 习

1. 画出△ABC 的中线、中位线，并说出它们的区别.

2. (口答)A、B 两点被池塘隔开，在 AB 外选一点 C，连结 AC 和 BC，并分别找出 AC 和 BC 的中点 M、N. 如果测得 $MN=20$ m，那么 A、B 两点的距离是多少？为什么？



(第2题)

3. 已知：三角形的各边分别为 6cm、8cm 和 10 cm，求连结各边中点所成三角形的周长.

4. 已知：梯形 $ABCD$，$AD \parallel BC$，对角线 AC、BD 相交于点 O，A'、B'、C'、D' 分别是 AO、BO、CO、DO 的中点.

求证：(1)四边形 $A'B'C'D'$ 是梯形；

(2)梯形 $ABCD$ 的周长等于梯形 $A'B'C'D'$ 周长的 2 倍.

连结梯形两腰中点的线段叫做**梯形的中位线**.

梯形中位线定理　梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

已知：梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，$AM=MB$，$DN=NC$（图4－67）.

求证：$MN \parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

分析：设法应用三角形中位线定理来证明.

证明：连结AN并延长，交BC的延长线于点E.

∵　$DN=NC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle D=\angle 3$，

∴　$\triangle ADN \cong \triangle ECN$.

∴　$AN=EN$，$AD=EC$.

又∵　$AM=MB$，

∴　MN是$\triangle ABE$的中位线.

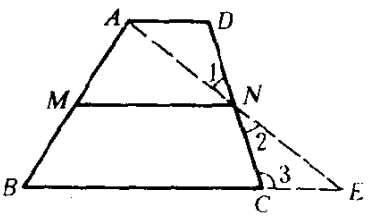


图　4－67

∴　$MN \parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}BE$（三角形中位线定理）.

∵　$BE=BC+CE=BC+AD$，

∴　$MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

在小学我们学过梯形面积的计算公式

$$S=(a+b)h \div 2 .$$

根据梯形中位线定理，如果中位线长为l，那么$l=(a+b)\div 2$，因此，梯形还有下面面积计算公式：

$$S=l \cdot h .$$

因为任意多边形都可以通过辅助线把它分割成平行四边形、三角形、梯形，所以可以应用这些图形的面积计算公式，来计算任意多边形的面积.

例 2 有一块四边形的地$ABCD$(图 4－68),测得$AB=26\,\text{m}$，$BC=10\,\text{m}$，$CD=5\,\text{m}$，顶点 B、C 到 AD 的距离分别为 10 m、4 m．求这块地的面积.

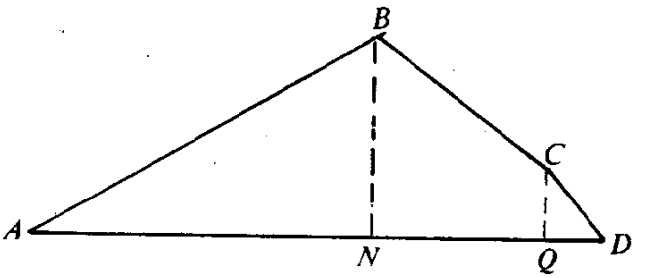


图 4－68

解：∵ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABN}+S_{梯形BCQN}+S_{\triangle CDQ}$

$$=\frac{1}{2}AN\cdot BN+\frac{1}{2}(BN+CQ)\cdot NQ+\frac{1}{2}QD\cdot CQ.$$

$BN=10$，$CQ=4$，$AB=26$，$BC=10$，$CD=5$，

$AN=\sqrt{AB^2-BN^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$，

$NQ=\sqrt{BC^2-(BN-CQ)^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$QD=\sqrt{CD^2-CQ^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

∴ $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 24\times 10+\frac{1}{2}\times(10+4)\times 8$

$+\frac{1}{2}\times 3\times 4=182\,(\text{m}^2)$.

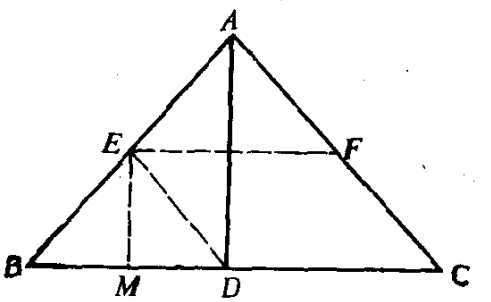
答：这块地的面积是 $182\,\text{m}^2$.

练　习

1. (1)梯形的上底长8 cm，下底长10 cm，求中位线长；
   (2)梯形的上底长8 cm，中位线长 10 cm，求下底长．
2. 梯形的中位线一定平分梯形的对角线吗？为什么？
3. 梯形的中位线长能不能与它的一条底边长相等？为什么？
4. 一个等腰梯形的周长是80 cm，如果它的中位线长与腰长相等，它的高是12 cm．求这个梯形的面积．

做一做

有一块三角形钢板如图，测得 BC 边上的高 $AD=1.2$m，线段 $BD=1$m、$DC=1.1$m．要在这块钢板上切割8个直角三角形零件，每个零件的直角边长分别为50 cm和60cm．用1:20的比例尺画出这块钢板的图形．在图上画出切割线，并计算剩余钢板的面积．(提示：先画出中位线 EF．再画出 $\triangle ABD$ 的中位线 EM，以 AD 为对称轴画另一侧的切割线．)



习 题 4.6

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 怎样将一条线段任意等分？任意等分线段的根据是什么？

(2) 三角形的中位线与中线有什么不同？三角形中位线有什么性质？

(3) 什么是梯形的中位线？梯形的中位线有什么性质？梯形有哪两个面积计算公式？

2. 已知线段 AB，用平行线等分线段定理把它七等分.

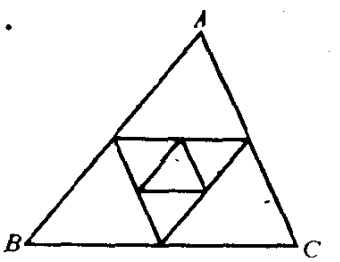
3. 求证：直角梯形的两个直角顶点到对腰中点的距离相等.

4. 已知：在$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是 BC、CA、AB 边的中点.

求证：(1) 四边形 $AFDE$ 是平行四边形；

(2) $\square AFDE$ 的周长等于 $AB+AC$.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c，它的三条中位线组成一个新三角形，这个新三角形的三条中位线又组成一个小三角形. 求这个小三角形的周长.



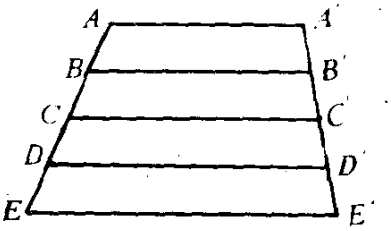
(第 5 题)

6. 求证：三角形的一条中位线与第三边上的中线互相平分.

7. 求证：顺次连结矩形四边中点所得的四边形是菱形.

8. 求证：顺次连结菱形四边中点所得的四边形是矩形.

9. 已知:如图,$AA' \parallel EE'$,
$AB=BC=CD=DE$, $A'B'=B'C'=C'D'=D'E'$,
$AA'=28\text{mm}$, $EE'=36\text{mm}$,
求BB'、CC'、DD'的长.

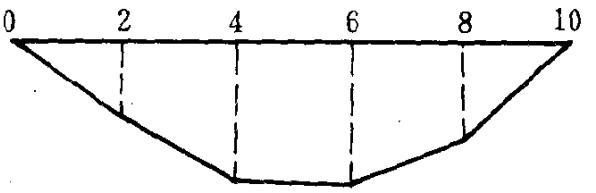


(第9题)

10. 已知: 一个等腰梯形的高是2m,它的中位线长是5m,一个底角是45°, 求这个梯形的面积和上、下底边的长.

11. 河流的一个横断面如图, 根据下表中的测量数据计算它的面积.

离河一岸的距离(m)	0	2	4	6	8	10
水深(m)	0.00	0.90	1.85	1.85	1.25	0.00

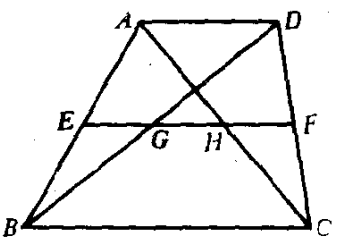


(第11题)

B 组

1. 已知: M、N 分别是$\square ABCD$的 AB、CD 边的中点. CM 交 BD 于点 E, AN 交 BD 于点 F.
求证: $BE=EF=FD$.

2. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E、F 分别是 AB、DC 的中点.
求证: $GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.



(第2题)

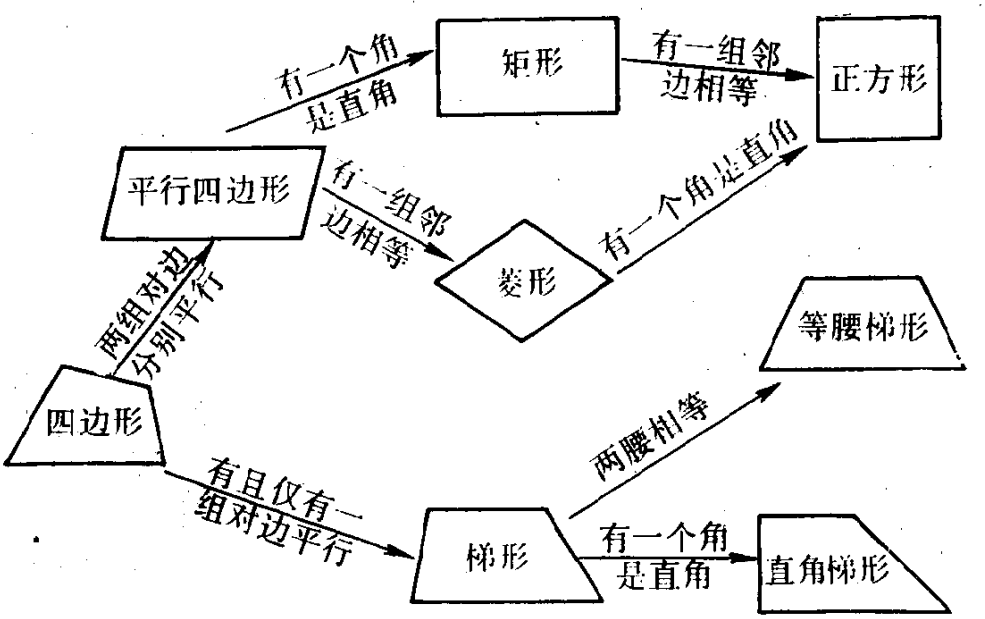
小结与复习

本章主要研究各种四边形.重点是平行四边形(包括矩形、菱形、正方形)和梯形的有关知识及其应用.

一、内容提要

在本章中，我们先学习了一般四边形的知识.在这个基础上,接着学习了平行四边形和梯形，最后,应用平行四边形和梯形的有关知识证明了平行线等分线段定理,三角形;梯形中位线定理.

1.四边形和各种特殊四边形之间的关系如下图所示:



2. 几种特殊四边形的性质：

	边	角	对角线	对称性
平行四边形	对边平行且相等	对角相等	两条对角线互相平分	中心对称
矩形	对边平行且相等	四个角都是直角	两条对角线互相平分且相等	轴对称 中心对称
菱形	对边平行，四条边都相等	对角相等	两条对角线互相垂直平分，每条对角线平分一组对角	轴对称 中心对称
正方形	对边平行，四条边都相等	四个角都是直角	两条对角线互相垂直平分且相等，每条对角线平分一组对角	轴对称 中心对称
等腰梯形	两底平行，两腰相等	同一底上的两个角相等	两条对角线相等	轴对称

3. 几种特殊四边形的常用判定方法：

平行四边形	(1)两组对边分别平行;(2)两组对边分别相等;(3)一组对边平行且相等; (4)两条对角线互相平分;(5)两组对角分别相等.
矩形	(1)有三个角是直角;(2)是平行四边形,并且有一个角是直角;(3)是平行四边形,并且两条对角线相等.
菱形	(1)四条边都相等;(2)是平行四边形,并且有一组邻边相等;(3)是平行四边形,并且两条对角线互相垂直.
正方形	(1)是矩形,并且有一组邻边相等; (2)是菱形，并且有一个角是直角.
等腰梯形	(1)是梯形，并且同一底上的两个角相等; (2)是梯形，并且两条对角线相等.

4. 其他重要定理

(1) 四边形的内角和等于 360°; n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$; 任意多边形的外角和等于 360°.

(2) 关于中心对称的两个图形有下列性质: (i) 是全等形; (ii) 对称点的连线都经过对称中心并且被对称中心平分. 可用性质(ii)的逆定理来判定两个图形关于中心对称.

(3) 平行线等分线段定理, 三角形、梯形中位线定理.

二、学习要求

1. 知道四边形和多边形的有关概念. 掌握四边形及多边形的内角和、外角和定理. 知道四边形的不稳定性.

2. 掌握平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念、性质和判定, 并能运用有关知识进行证明和计算. 知道这些图形之间的联系与区别.

3. 知道中心对称和中心对称图形的概念, 以及关于中心对称的两个图形的性质. 能找出线段、平行四边形的对称中心, 会画与已知图形成中心对称的图形. 会画矩形、菱形、正方形的对称轴.

4. 掌握梯形、等腰梯形、直角梯形的概念, 掌握等腰梯形的性质和判定. 能够运用它们进行有关的证明和计算.

5. 掌握平行线等分线段定理，三角形、梯形中位线定理. 能够运用这些定理进行有关的证明和计算. 会按要求等分一条已知线段.

6. 会计算特殊四边形的面积. 会利用把不规则多边形分割成三角形和特殊四边形的方法来计算多边形的面积.

三、需要注意的几个问题

1. 开始研究四边形时，常通过作辅助线把四边形化为三角形，运用三角形的知识来研究四边形的问题，当得到了四边形的新知识后，要注意直接运用这些新知识，避免再回到用三角形从头做起.

2. 随着知识的丰富，解决问题的方法增多了，当遇到一个问题有多种解法时，要注意选取简单的解法.

3. 四边形在日常生活和生产中应用很广；学习中要注意联系实际，借助实例理解所学概念，注意所学知识的实际运用. 学习中要多动手画图、实际测量、观察，争取把知识学活.

复习题四

A 组

1. 填空:

(1) n 边形的内角和等于____，外角和等于____;

(2) 两组对边分别平行的四边形是_____，有一个角是____的平行四边形是矩形，有一组邻边_____的平行四边形是菱形，有一组邻边_____并且有一个角是_____的平行四边形是正方形;

(3) 一组对边____而另一组对边_____的四边形是梯形，一腰____底的梯形是直角梯形，两腰____的梯形是等腰梯形;

(4) 平行四边形的对角____，对边____，对角线____.矩形的四个角____，对角线____且____.菱形的四条边____，对角线____，并且每一条对角线平分一组____;

(5) 等腰梯形在同一底上的两个角____，对角线_____;

(6) 我们学过的四边形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是_____、_____、_____.

(7) 三角形的中位线____于第三边，并且等于它的____，梯形的中位线平行于____，并且等于_____和的一半.

2. 判断题:

(1) 两条对角线相等且互相垂直的四边形是矩形; (　　)

(2)两条对角线互相垂直平分的四边形是菱形; ( )

(3)两条对角线互相垂直的矩形是正方形; ( )

(4)两条对角线相等的菱形是正方形; ( )

(5)两条对角线垂直且相等的平行四边形是正方形; ( )

(6)两条对角线垂直且相等的四边形是正方形. ( )

3. 选择题:

(1)能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的题设是 ( )

(A) $AB \parallel CD, AD = BC$. (B) $\angle A = \angle B, \angle C = \angle D$.

(C) $AB = CD, AD = BC$. (D) $AB = AD, CB = CD$.

(2)在给定的条件中, 能画出平行四边形的是( )

(A)以 60cm 为一条对角线,20 cm、34 cm 为两条邻边.

(B)以 6 cm、10 cm 为对角线, 8 cm 为一边.

(C)以 20 cm、36 cm 为对角线, 22 cm 为一边.

(D)以 6 cm 为一条对角线, 3 cm、10 cm 为两条邻边.

(3)正方形具有而菱形不一定具有的性质是( )

(A)对角线互相平分. (B)对角线相等.

(C)对角线平分一组对角. (D)对角线互相垂直.

4. 四边形四个内角的比是 1 :2 :3 :4 , 求各角的度数.

5. 已知: $\square ABCD$ 的周长为60 cm . 对角线 AC、BD 相交于点 O . $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle BOC$ 的周长长 8 cm . 求这个平行四边形各边的长.

6. 已知: $\square ABCD$ 的对角线相交于点 O, EF 经过点 O, 与 AB 交于点 E, 与 CD 交于点 F, G、H 分别是 AO 和 CO 的中点. 求证: 四边形 $EHFG$ 是平行四边形 .

7. 矩形对角线组成的对顶角中，有一组是 60°，对角线与各边组成的角是多少度？

8. 求证：如果平行四边形四个内角的平分线能够围成一个四边形，那么这个四边形是矩形．

9. 画一个矩形，使它的一条边长为 3 cm，对角线长为 4 cm．

10. (1) 菱形周长为 20 cm，两邻角的比为 1∶2，求较短的对角线长．

(2) 菱形周长为 10 cm，一条对角线长为 2.5 cm．求菱形各角的度数．

(3) 已知菱形的周长是 52 cm，一条对角线长是 24 cm．求它的面积．

(4) 已知菱形的两条对角线长分别为 a、b．求它的周长和面积．

11. 求证：菱形的对角线长的平方和等于它一边长的平方的 4 倍．

12. 画一个菱形，使它的边长为 3 cm，一条对角线长为 4 cm．

13. 在已知锐角三角形 ABC 的外面作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$．求证：$BG=CE$．

14. 已知：E 是正方形 $ABCD$ 内一点，$EA=AB=BE$．求证：$\angle ECD=\angle EDC=15°$．

15. 画梯形 $ABCD$，使底 $AD=2$ cm，底 $BC=5$ cm，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$．

16. 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，D、F、E 分别是 BC、CA、AB 边的中点．求证：$AD=EF$．

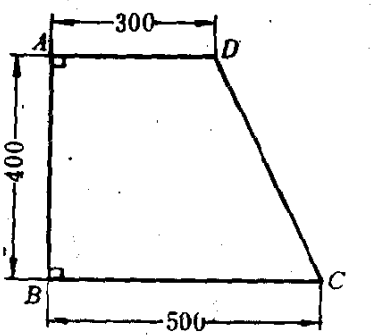
17. 已知：E 和 F 分别是 $\square ABCD$ 的边 AD 和 BC 上的点，并且 $AE=BF$，G 是 AF 和 BE 的交点，H 是 CE 和 DF 的交点. 求证：$GH \parallel BC$，$GH=\frac{1}{2}BC$.

18. 已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E 是 AD 的中点，F 是 BE 的延长线与 AC 的交点. 求证：$AF=\frac{1}{2}FC$.

19. 已知等腰梯形的中位线长 6 cm，腰长 5 cm，求它的周长.

20. 从 $\square ABCD$ 的顶点 A、B、C、D 向形外的任意直线 MN 引垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，垂足分别为 A'、B'、C'、D'. 求证：$AA'+CC'=BB'+DD'$.

21. 在长为 1.6 m，宽为 1.2 m 的矩形铝板上，剪切如图所示的直角梯形零件（尺寸单位为 mm）. 问这块铝板最多能剪出多少个这样的零件.



（第 21 题）

B 组

1. 已知：$\square ABCD$ 中，E、F 分别是 AD、BC 的中点，AF 与 BE 交于点 G，CE 和 DF 交于点 H. 求证：EF 与 HG 互相平分.

2. 求证：(1) 等腰三角形底边上任一点与两腰的距离的和等于腰上的高；(2) 等腰三角形底边延长线上任一点与两腰的距离的差等于腰上的高.

3. 从菱形两条对角线的交点分别向各边引垂线. 求证：连结各垂足的四边形是矩形.

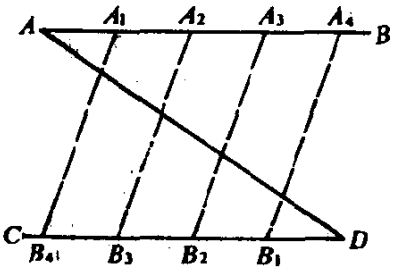
4. 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90°$, 四边形 $ACDE$ 和 $CBFG$ 是在 $\triangle ABC$ 外的正方形, $\triangle ABC$ 的高 CH 所在的直线交 DG 于点 M. 求证: (1) $DG=AB$; (2) $CM=\frac{1}{2}DG$.

5. 已知: O 是 $\square ABCD$ 的对称中心, EF 和 GH 经过点 O, EF 分别交 AB、CD 于点 E、F, GH 分别交 AD、BC 于点 G、H. 求证: 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

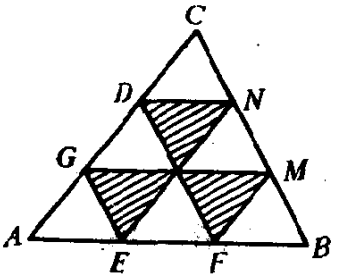
6. (1)已知: 四边形 $ABCD$ 中, $AB=DC$, $AC=BD$, $AD\neq BC$. 求证: 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形;

(2)如果(1)的题设中没有 $AD\neq BC$, 那么四边形一定是等腰梯形吗? 为什么?

7. 如图, 在 AD 的两旁作 $\angle ADC=\angle DAB$, 以 A 和 D 为起点, 分别在 AB 和 DC 上截取 4 条线段, 所有线段的长相等, 那么相应分点的连线把 AD 五等分. 为什么?



(第7题)



(第8题)

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB=30\text{cm}$, $BC=24\text{cm}$, $CA=27\text{cm}$, $AE=EF=FB$, $EG\parallel FD\parallel BC$, $FM\parallel EN\parallel AC$. 求阴影部分三个三角形周长的和. 它们的面积的和是 $\triangle ABC$ 的面积的几分之一?

自我测验四

(满分 100 分，时间 45 分)

1. (每空 2 分，共 34 分)填空：

(1) 四边形的内角和等于____度，外角和等于____度；

(2) 一个多边形的每一个外角都等于 30°，这个多边形的边数是____，它的内角和是____度；

(3) 任意的 $\square ABCD$，如果对角线 AC、BD 相交于点 O，那么四对全等的三角形是：____，____，____，____；

(4) 矩形的对角线相交成的角中，有一个角是 60°，这个角所对的边长为 20 cm．这个矩形的对角线长为_____，矩形的面积 $S=$_____；

(5) 一个菱形的两条对角线长分别为 6 cm、8 cm．这个菱形的边长为_____，面积 $S=$_____；

(6) 平行四边形是_____对称图形，等腰梯形是_____对称图形；

(7) 梯形的上底长为 3 cm，下底长为 7 cm，它的一条对角线把它分成两部分面积的比为_____，梯形的中位线长等于_____，梯形被中位线分成的两部分面积比为_____．

2. (每小题 8 分，共 16 分)选择题：

(1) 不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的题设是(　　)

$(A)\ AB=CD, AD=BC$.　　$(B)\ AB \fallingdotseq CD$.

$(C)\ AB=CD, AD \parallel BC$.　　$(D)\ AB \parallel CD, AD \parallel BC$.

(2) 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，能判定它是正方形的题设是(　　)

$(A)\ AO=CO, BO=DO$.

$(B)\ AO=CO=BO=DO$.

$(C)\ AO=CO, BO=DO, AC \perp BD$.

$(D)\ AO=BO=CO=DO, AC \perp BD$.

3. (每小题 10 分，共 20 分)

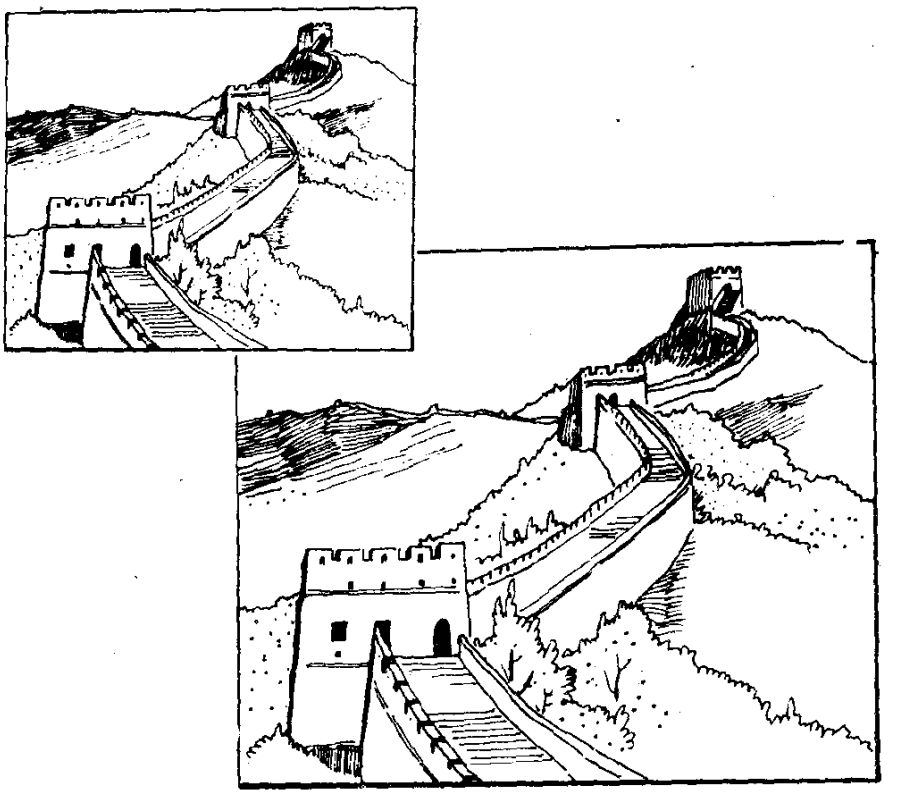
(1) 画 $\square ABCD$，使 $AB=3\text{ cm}$，$BC=4\text{ cm}$，$\angle B=60°$；

(2) 3 等分一条已知线段 AB.(写作法)

4. (15 分) 求证：连结四边形对边中点的两条线段互相平分.

5. (15 分) 已知一个梯形的中位线长 16 cm，梯形的一条对角线把中位线分成两条线段，这两条线段的差是 4 cm．求这个梯形的上、下底长.

第五章　相似形



在现实生活中，我们经常见到形状相同的图形．例如两张大小不等的长城的图片；我国国旗上的大五角星和小五角星，等等，我们把这种形状相同的图形说成是相似的图形．

这一章我们将学习什么是相似图形，重点研究相似三角形．为了研究相似形，我们先研究比例线段．

一　比例线段

5.1　比例线段

我们知道，选定一个长度单位（例如米、厘米等），可以量出一条线段的长度．如果选用同一长度单位量得两条线段 a、b 的长度分别是 m、n，那么就说这两条线段的**比**是 $a:b=m:n$，或写成 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$．和数的比一样，两条线段的比 $a:b$ 中，a 叫做比的**前项**，b 叫做比的**后项**．

例如，一张桌面的长 $a=1.25\text{m}$，宽 $b=0.75\text{m}$，那么它的长与宽的比是

$$\frac{a}{b}=\frac{1.25}{0.75}=\frac{5}{3}.$$

因为线段的长度是一个正量，所以两条线段的比值总是正数．

如果改用厘米、毫米作为线段的长度单位，那么上面所说的桌面的长和宽的比分别是

$$\frac{a}{b}=\frac{125}{75}=\frac{5}{3},\frac{a}{b}=\frac{1250}{750}=\frac{5}{3}.$$

由此可见，两条线段的比与所采用的长度单位没有关系因此，讨论线段的比时，一般不指明长度单位．

但要注意，求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位，如果单位不同，那么必须化成同一单位，再求它们的比．

例 1 A、B 两地的实际距离 $AB=250\,\text{m}$，画在图上的距离 $A'B'=5\,\text{cm}$. 求图上的距离与实际距离的比.

解: 取米作为共同的长度单位，那么 $AB=250\,\text{m}$，$A'B'=0.05\,\text{m}$.

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{0.05}{250}=\frac{1}{5000}.$$

答: 图上距离与实际距离的比是 1:5000.

我们常常看到，在地图或其他工程图纸上，都标有比例尺，比例尺就是图上长度与实际长度的比.

例 2 已知: 在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，斜边 $AB=2$. 求 $\frac{AB}{BC}$，$\frac{AC}{AB}$.

解: 如图 5－1，由已知条件和直角三角形的性质可知，$BC=1$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}=2,$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

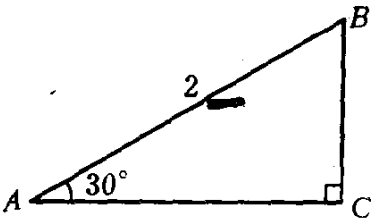


图 5－1

练 习

1. 用厘米作为长度单位，量一下你的几何教科书的长与宽，求出长与宽的比，改用毫米作为长度单位，再求出长与宽

的比，所得的两个比相等吗？

2. (口答)已知一矩形的长 $a=1.35\text{ m}$，宽 $b=60\text{ cm}$，求 $a:b$.

3. (口答) (1)梯形的中位线与两底之和的比是多少？

(2)直角三角形的斜边与斜边上的中线的比是多少？

4. 延长线段 AB 到 C，使 $BC=AB$，求：

(1) $AC:AB$；(2) $AB:BC$；(3) $BC:AC$.

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么，这四条线段叫做**成比例线段**，简称**比例线段**.

例如，图 5－2 中，$AB=50$，$BC=25$，$A'B'=20$，$B'C'=10$.

$$\because \quad \frac{AB}{BC}=\frac{50}{25}=2,\quad \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{20}{10}=2,$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

因此，AB、BC、$A'B'$、$B'C'$是成比例线段.

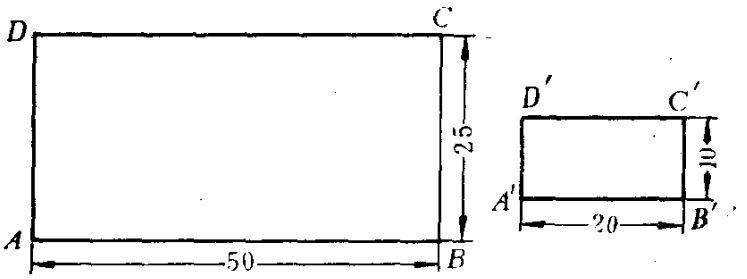


图 5－2

已知四条线段 a、b、c、d，如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 或 $a:b=c:d$，那么 a、b、c、d 叫做组成比例的**项**，线段 a、d 叫做**比例外项**，线段 b、c 叫做**比例内项**，线段 d 叫做 a、b、c 的**第四比例项**.如果作为比例内项的是两条相同的线段，即

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad 或 \quad a:b=b:c,$$

那么线段 b 叫做线段 a 和 c 的**比例中项**.

两条线段的比是它们的长度的比，也就是两个数的比.关于成比例的数具有下面的性质.

(1)**比例的基本性质**

如果 $a:b=c:d$，**那么** $ad=bc$.

因为 $a:b=c:d$，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，两边同乘以 bd，得 $ad=bc$.

上述性质的逆命题也成立，即

如果 $ad=bc$，**那么** $a:b=c:d$.

因为，在等式 $ad=bc$ 的两边同除以 bd，得到

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

即 $a:b=c:d$.

根据比例的基本性质可知:

如果 $a:b=b:c$，**那么** $b^2=ac$.它的逆命题也成立.

(2)合比性质

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

在等式两边都加上1,得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

同样可有:

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(3)等比性质

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)$,那么

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}.$$

令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$, 则有 $a=bk, c=dk,$ $\cdots, m=nk$.

$$\therefore \quad \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}$$

$$=\frac{(b+d+\cdots+n)k}{b+d+\cdots+n}$$

$$=k$$

$$=\frac{a}{b}.$$

练　习

1. (1) 从 $a:b=c:d$，根据什么性质，可以得到 $ad=bc$？

(2) 从 $ad=bc$，根据什么性质，可以得到 $d:b=c:a$？从 $ad=bc$，还可得到哪些比例？

2. 求证：如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

3. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 的值.

例 3　在相同时刻的物高与影长成比例. 如果一古塔在地面上的影长为 50 米，同时，高为 1.5 米的测竿的影长为 2.5 米，那么古塔的高是多少米？

解：设古塔的高为 x 米，根据题意得

$$\frac{x}{50}=\frac{1.5}{2.5}.$$

$\therefore$　$2.5x=1.5\times 50$ (比例的基本性质).

$\therefore$　$x=30$ (米).

答：古塔的高为 30 米.

例 4　已知，图 5－3 中，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

求证：(1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$；

(2) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

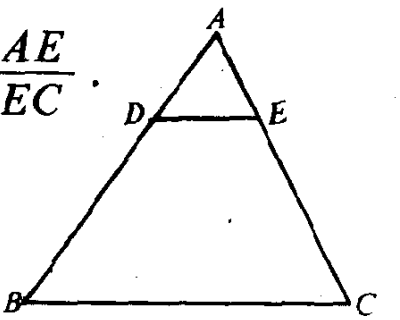


图　5－3

证明：(1)∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$（合比性质），

即 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

(2)∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$.

∴ $\frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}$（合比性质），

即 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

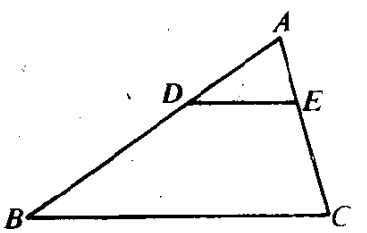
∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

练　习

1. 同一时刻，一竿的高为 1.5 米，影长为 1 米，某塔影长为 20 米，求塔的高.

2. 已知：如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=15, AB=40, AC=28$.

求 AE.



(第 2 题)

例 5 $\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{3}{5}$，且$\triangle A'B'C'$的周长为50 cm.求$\triangle ABC$的周长.

解：$\because$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore$ $\dfrac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\dfrac{3}{5}$（等比性质）.

$\because$ $A'B'+B'C'+A'C'=50$，

$\therefore$ $AB+BC+AC=\dfrac{3}{5}\times 50=30\ (\text{cm})$.

例 6 已知：如图5－4，

$AB=1$，$AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

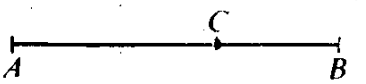


图 5－4

求证：$AC^2=AB\times BC$.

证明：$\because$ $AB=1$，$AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore$ $BC=1-AC=1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$\because$ $AC^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，

$$AB\times BC=1\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$\therefore\quad AC^2=AB\times BC$.

如图 5－4,把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC $(AC>BC)$,且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项,叫做把线段 AB **黄金分割**,点 C 叫做线段 AB 的**黄金分割点**.

由于 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx0.618$,所以长为 1 的线段的黄金分割点,大约在距一个端点的 0.618 处.

练　习

1. 已知:四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{3}{4}$,且四边形 $A'B'C'D'$ 的周长为 80 cm.求四边形 $ABCD$ 的周长.

2. 已知:线段 $a=1$,$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$c=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

求证:线段 b 是 a、c 的比例中项.

3. 已知 C 是线段 AB 的黄金分割点,$\frac{AC}{AB}\approx0.618$,

求 $\frac{CB}{AC}$ 的近似值.

习 题 5.1

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 什么是比例线段？什么是比例外项、比例内项、第四比例项、比例中项？

(2) 线段所成的比例具有哪些性质？

2. (1) 等边三角形的边长为 4，求高与边长的比.

(2) 正方形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=a$. 求 $AB:BD$.

3. 图纸上画出的一个零件的长(图距)是 32 毫米，比例尺是 1 :20，这个零件实际的长是多少？

4. (1) 已知：$a=4\text{ cm}$，$b=6\text{ cm}$，$c=3\text{ cm}$. 求 a、b、c 的第四比例项 d.

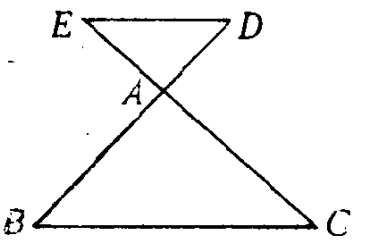
(2) 已知：$a=2.4\text{ cm}$，$c=5.4\text{ cm}$. 求 a 和 c 的比例中项 b.

5. 已知：点 P 在线段 AB 上，且 $AP:PB=2:5$. 求 $AB:PB$ 和 $AP:AB$.

6. 已知：如图，$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$.

求证：(1) $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$；

(2) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$.



(第 6 题)

5.2 平行线分线段成比例定理

在四边形一章里，我们学过平行线等分线段定理. 如图 5－5，直线 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，直线 l_4 被 l_1、l_2、l_3 所截，其中截得的两条线段为 AB、BC. l_5 是另外任一条被直线 l_1、l_2、l_3 所截的直线，其中截得的两条线段为 DE、EF. 如果 $AB=BC$，那么 $DE=EF$. 也就是

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=1.$$

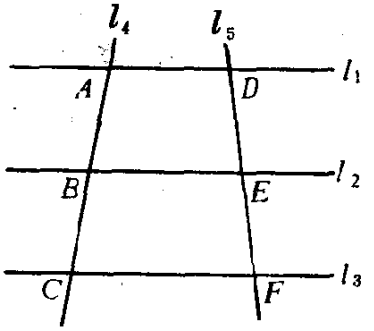


图 5－5

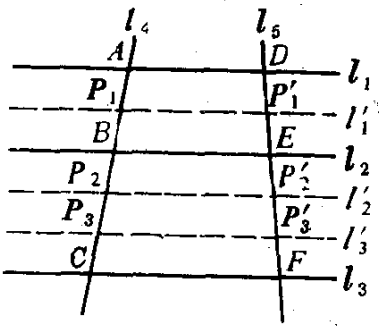


图 5－6

如果 $\frac{AB}{BC}\neq 1$，那么 $\frac{DE}{EF}$ 是否还与 $\frac{AB}{BC}$ 相等呢？

我们看 $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$ 的情况. 如图 5－6，设线段 AB 的中点为 P_1，线段 BC 的三等分点为 P_2、P_3，这时 $AP_1=P_1B=BP_2=P_2P_3=P_3C$. 分别过点 P_1、P_2、P_3 作直线 l_1'、l_2'、l_3' 平行于 l_1，与 l_5 的交点分别为 P_1'、P_2'、P_3'. 根据平行线等分线段定理可知：

$$DP_1'=P_1'E=EP_2'=P_2'P_3'=P_3'F.$$

$\because$ $DE = DP_1' + P_1'E = 2DP_1'$,

$EF = EP_2' + P_2'P_3' + P_3'F = 3DP_1'$,

$\therefore$ $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{2DP_1'}{3DP_1'} = \dfrac{2}{3}$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

事实上，对于 $\dfrac{AB}{BC}$ 是任何实数，当 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ 时，都可得到：

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

应用比例性质，还可以得到：

$\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{EF}{DE}$，$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$，$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$，等等.

因此，我们得到：

平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

例 1　已知：如图5－7，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB = 3$，$DE = 2$，$EF = 4$. 求$BC$.

解：$\because$ $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，

$\therefore$ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$（平行线分线段成比例定理）.

即 $\dfrac{3}{BC} = \dfrac{2}{4}$.

$\therefore$ $BC = 6$.

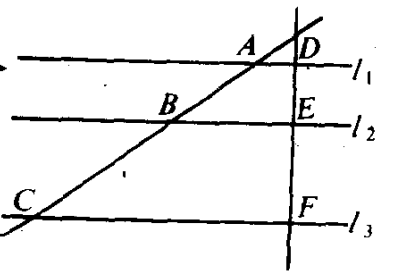


图 5－7

例 2 已知:如图5－8，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$.

求证：$\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{m}{m+n}$.

证明：$\because$ $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，

$\therefore$ $\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{m}{n}$(平行线分线段成比例定理).

$\therefore$ $\dfrac{EF}{DE}=\dfrac{n}{m}$，

$\dfrac{EF+DE}{DE}=\dfrac{n+m}{m}$，

即 $\dfrac{DF}{DE}=\dfrac{m+n}{m}$.

$\therefore$ $\dfrac{DE}{DF}=\dfrac{m}{m+n}$.

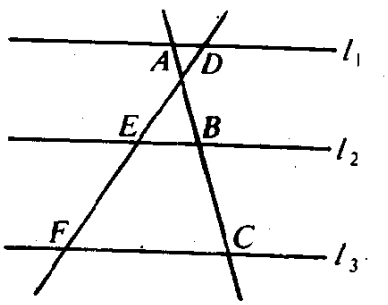
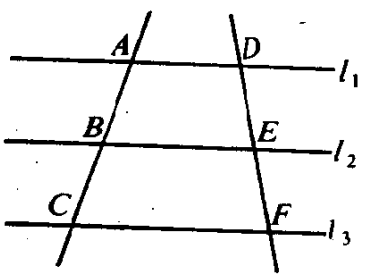


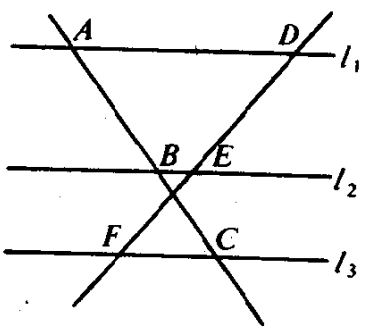
图 5－8

练 习

1. 已知：如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB=a$，$BC=b$，$EF=c$. 求 DE.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$. 证明：$\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}$.

观察下面的两个图形.

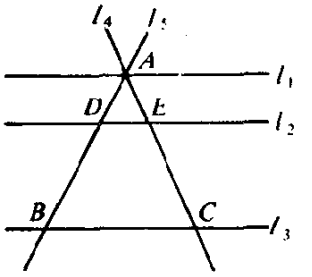


图 5－9

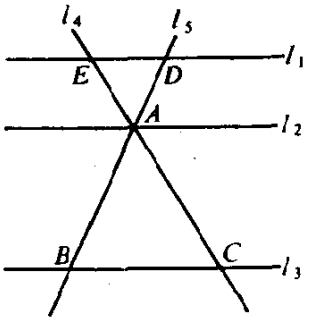


图 5－10

图 5－9 中，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$l_4$ 与 l_5 的交点 A 在直线 l_1 上，根据平行线分线段成比例定理有：

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

图 5－10 中，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$l_4$ 与 l_5 的交点 A 在直线 l_2 上，同理有

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

如果把图 5－9 中的 l_2 看成是平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 的直线，把图 5－10 中的 l_1 也看成是平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 的直线，那么可以得到：

推论　平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例.

例 3　已知：如图5－11，$DE \parallel BC$，$AB=15$，$AC=9$，$BD=4$. 求 AE.

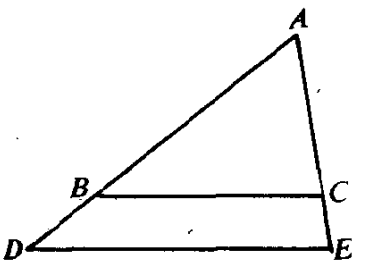


图 5－11

解：∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CE}$（平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例），

即 $\dfrac{15}{4} = \dfrac{9}{CE}$.

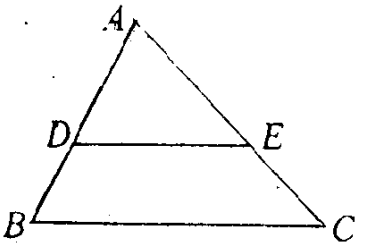
∴ $CE = \dfrac{12}{5}$.

∴ $AE = AC + CE = 9 + \dfrac{12}{5} = 11\dfrac{2}{5}$.

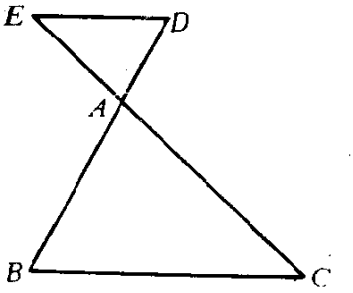
练　习

1. 已知：如图，$DE \parallel BC$，$AB = 14$，$AC = 18$，$AE = 10$.

求 AD 的长.



（第1题）



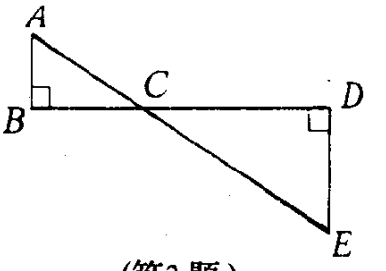
（第2题）

2. 已知：如图，$ED \parallel BC$，且 $AB = 5$，$AC = 7$，$AD = 2$.

求：AE 的长.

3. 已知：如图，$AB \perp BD$，$ED \perp BD$，垂足分别为 B、D.

求证：$\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{BC}{DC}$.



（第3题）

如果一条直线截三角形的两边，所得的对应线段成比例，那么这条直线是不是平行于这个三角形的第三边呢？

如图 5－12，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$．过点 D 作直线 DE' $/\!/ BC$，交 AC 于点 E'．则有

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE'}{AC}$（平行于三角形一边的直线截其他两边，所得的对应线段成比例）．

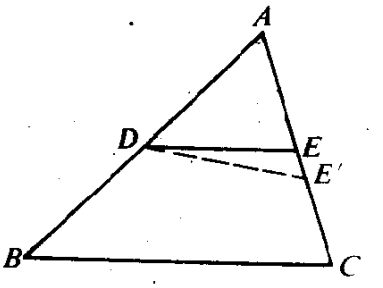


图 5－12

$\because \quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

$\therefore \quad \frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$．

$\therefore \quad AE=AE'$．

因此，直线 DE' 与直线 DE 重合．

$\therefore \quad DE /\!/ BC$．

还可以证明：如果一条直线截三角形的两边的延长线（指在第三边同一侧的延长线，下同）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

定理　如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边．

例 4 求证：如图5－13.

(1)如果$\angle A=\angle A'$，

那么 $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$；

(2)如果 $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$，

那么$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$.

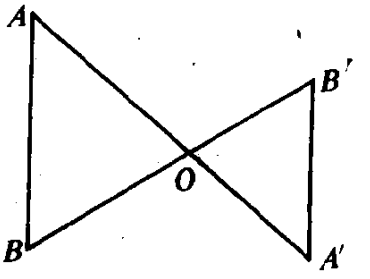


图 5－13

证明：(1)∵ $\angle A=\angle A'$，

∴ $AB\parallel A'B'$.

∴ $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$(平行于三角形一边的直线截其他两边的延长线,所得的对应线段成比例).

(2)∵ $\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}$，

∴ $AB\parallel A'B'$(如果一条直线截三角形的两边的延长线所得的对应线段成比例,那么这条直线平行于三角形的第三边).

∴ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

练 习

一条直线交$\triangle ABC$的边AB于点D,交AC于点E.如果已知下列线段的长度,那么DE和BC是否平行?

(1)$AD=3,BD=4,AE=1.8,CE=2.4$;

(2)$AB=11,BD=6,AC=4.4,AE=2.4$.

例 5 已知线段 PQ. 在 PQ 上求作点 D, 使 $PD:DQ=2:1$.

已知: 线段 PQ (如图 5－14).

求作: 在线段 PQ 上求一点 D, 使 $PD:DQ=2:1$.

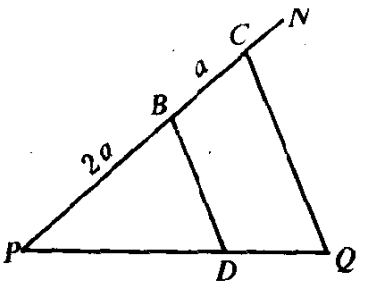


图 5－14

作法: 1. 以点 P 为端点, 作射线 PN (图 5－14).

2. 在 PN 上顺次截取 $PB=2a$, $BC=a$ (a 为任意长).

3. 连结 CQ. 过点 B 作 $BD\parallel CQ$, 交 PQ 于点 D.

点 D 就是所求作的点.

证明略.

例 6 平行于三角形的一边, 并且和其他两边相交的直线, 所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例.

已知: 如图 5－15, $DE\parallel BC$, 分别交 AB、AC 于点 D、E.

求证: $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

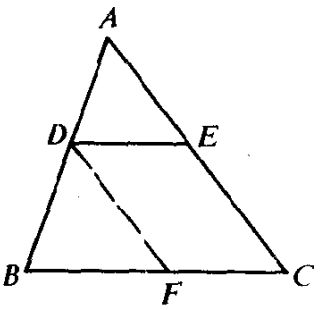


图 5－15

分析: 由平行线分线段成比例定理的推论可以直接得到:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

$\frac{DE}{BC}$ 中的 DE 不在$\triangle ABC$的边 BC 上，我们不能直接利用前面所学的定理. 但从比例 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$ 可以看出，除 DE 以外，其他线段都在$\triangle ABC$的边上，因此，我们只要将 DE 移到 BC 边上去，得 $CF=DE$，然后再证明 $\frac{AD}{AB}=\frac{CF}{BC}$ 就可以了. 这只要过点 D 作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F，CF 就是平移 DE 所得的线段.

证明：过点 D 作 $DF \parallel AC$，交 BC 于点 F.

$\because$ $DE \parallel BC$，$DF \parallel AC$，

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{FC}{BC}=\frac{AD}{AB}$.

$\because$ 四边形 $DFCE$ 是平行四边形，

$\therefore$ $DE=FC$.

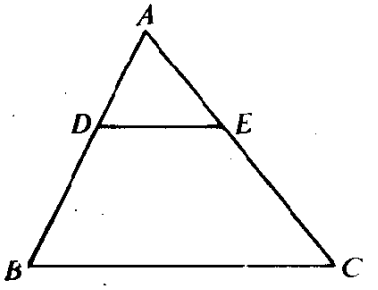
$\therefore$ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$.

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

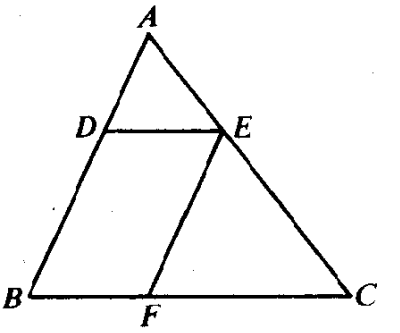
练　习

1. 将已知线段 a 分成 2∶3 两部分.

2. 已知：如图，$DE \parallel BC$，$AD=3.5$，$AB=10.5$，$DE=4$．求 BC．



（第2题）



（第3题）

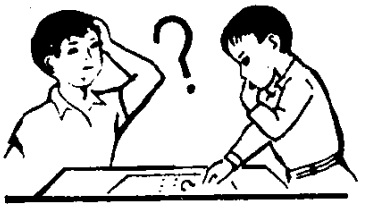
3. 已知：如图，$DE \parallel BC$，$EF \parallel AB$．判断下列比例式是否正确．

(1) $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{DE}{BC}$；

(2) $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BF}{FC}$；

(3) $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$．

想一想



已知线段 a、b、c．你能根据平行线分线段成比例定理作出 a、b、c 的第四比例项吗？

习 题 5.2

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 平行线分线段成比例定理及其推论的内容各是什么？

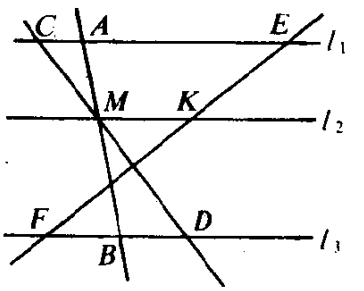
(2) 如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线与这个三角形的第三边平行吗？

(3) 平行于三角形一边的直线截其他两边所得的三角形的三边，与原三角形的三边有怎样的关系？

2. 已知：梯形 $ABCD$，点 E 是腰 AB 上的一点．在腰 CD 上求作一点 F，使 $CF:FD=BE:EA$．

3. 如图，$l_1 // l_2 // l_3$，$AM=3, BM=5, CM=4.5$，$EF=16$．

求 DM、EK、FK 的长．



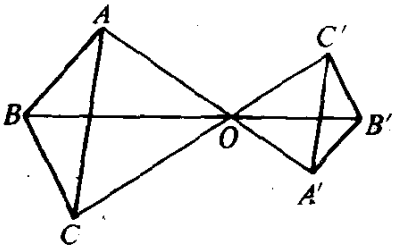
(第 3 题)

4. 已知：AB、CD 为梯形 $ABCD$ 的底，对角线 AC、BD 的交点为 O，且 $AB=12, CD=4, BD=15$．求 OB、OD．

5. 已知：在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 边上的点，且 $AD=18$，$AB=24$，$AE=21$，$AC=28$．

求证：$\angle ADE=\angle ABC$．

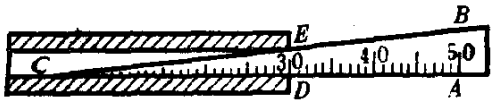
6. 如图，$BC \parallel B'C'$，$AC \parallel A'C'$. 求证：$AB \parallel A'B'$. 如果 $BC = 2B'C'$，那么 AB 是 $A'B'$ 的多少倍？



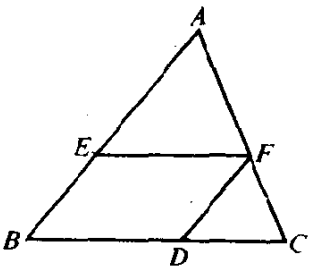
（第6题）

7. 把已知线段 a 分成4∶3 两部分.

8. 如图，测量小玻璃管口径的量具 ABC 上，AB 长为 5 毫米，AC 被分为 50 等份. 如果小管口 DE 正好对着量具上 30 份处（$DE \parallel AB$），那么小管口径就是 3 毫米，为什么？如果 DE 对着量具上 38 份处呢？



（第8题）



（第9题）

9. 已知：如图，$EF \parallel BC$，$FD \parallel AB$，$AE = 1.8$ 厘米，$BE = 1.2$ 厘米，$CD = 1.4$ 厘米. 求 BD.

B 组

1. $\triangle ABC$ 中，作直线 DN 平行于中线 AM，设这条直线交边 AB 于点 D，交边 CA 的延长线于点 E，交边 BC 于点 N. 求证：$AD : AB = AE : AC$.

2. 梯形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在腰 AB、CD 上，$EF \parallel AD$，$AE : EB = m : n$. 求证：$(m+n)EF = mBC + nAD$. 你能由此推导出梯形的中位线公式吗？（提示：连结 AC 交 EF 于点 G，分别求 GE、GF.）

读一读

黄金分割

希腊学者欧多克斯(公元前408年～公元前355年)曾提出这样的问题：能否将一条线段分为不相等的两部分，使较长部分为原线段和较短部分的比例中项？这一问题就是第5.1节例6中所说的黄金分割问题.

怎样把线段 AB(图1)黄金分割呢？下面给出了一种方法.

1. 过点 B 作 $BD \perp AB$,使 $BD=\frac{1}{2}AB$.

2. 连结 AD,在 AD 上截取 $DE=DB$.

3. 在 AB 上截取 $AC=AE$.

则 $AC^2=AB \cdot BC$.

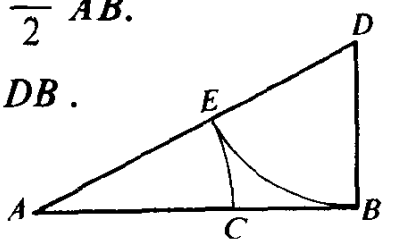


图 1

证明：设 $AB=a$, $AC=x$,

则 $AD=x+\frac{a}{2}$.在Rt$\triangle ABD$中，由勾股定理可得

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

整理可得 $$x^2=a(a-x).$$

即 $$AC^2=AB \cdot BC.$$

点 C 常说成是线段 AB 的一个黄金分割点.

当 $AB=1$ 时，AC 的近似值为0.618,即

$$0.618^2 \approx 1 \cdot (1-0.618).$$

如果一个矩形的宽与长的比近似为0.618，那么这个矩形常说成是黄金矩形(图2).

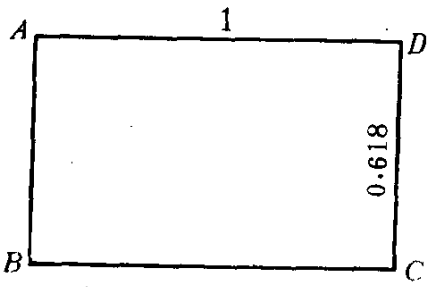


图 2

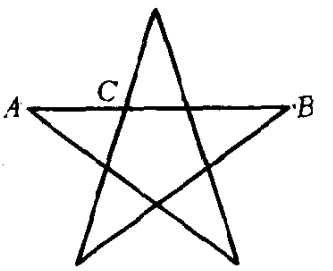


图 3

黄金分割在几何作图上有很多应用. 如五角星形(图3)的各边是按黄金分割划分的，其中点C就是线段AB的一个黄金分割点. 作圆的内接正十边形也能归结为黄金分割等.

黄金分割也被广泛用在建筑设计、美术、音乐、艺术等方面.如在设计工艺品或日用品的宽和长时，常设计成宽与长的比近似为0.618，这样易引起美感；在拍照时，常把主要景物摄在接近于画面的黄金分割点处，会显得更加协调、悦目；舞台上报幕员报幕时总是站在近于舞台的黄金分割点处，这样音响效果就比较好，而且显得自然大方. 等等.

黄金分割在工厂里也有着普遍的应用. 如“优选法”中常用的“0.618法”就是黄金分割的一种应用.

二　相似三角形

5.3　相似三角形

前面我们讲过，两幅形状相同大小不等的长城的图片是相似的．如图 5－16 中的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是不是相似的呢？

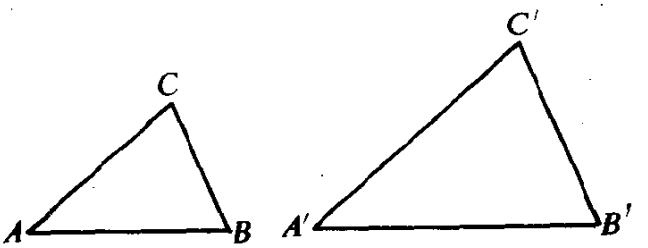


图　5－16

对应角相等、对应边成比例的三角形，叫做**相似三角形**．图 5－16 中的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，如果有

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k,$$

那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是相似的．

相似我们用符号“$\backsim$”来表示，读作“相似于”．相似三角形对应边的比 k，叫做**相似比**（或**相似系数**）．图 5－16 中的两个三角形相似，我们就记作

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

如果 $AB:A'B'=BC:B'C'=AC:A'C'=1:2$，那么$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比 $k_1=\frac{1}{2}$，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比 $k_2=2$.

注意 (1)在记两个三角形相似时，和记两个三角形全等一样，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上，这样可以比较容易地找出相似三角形的对应角和对应边.

(2)$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比k_1和$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比k_2不一定相等，而是 $k_1=\frac{1}{k_2}$.当且仅当它们全等时，才有 $k_1=k_2=1$.三角形全等是相似的特殊情况.

我们研究下面的两个图形.

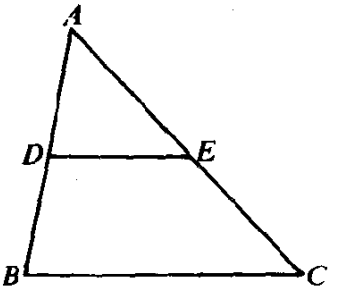


图 5-17

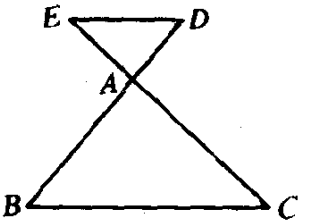


图 5-18

图 5-17 中，如果 $DE \parallel BC$，那么$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，且 $\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$.

又因为$\angle A=\angle A$，

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

类似地，图 5－18 中，当 $ED \parallel BC$ 时，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$. 由此，可以得到下面的定理：

定理　平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

练　习

1. (1) 所有的等腰三角形都相似吗？所有的等边三角形呢？为什么？

(2) 所有的直角三角形都相似吗？所有的等腰直角三角形呢？为什么？

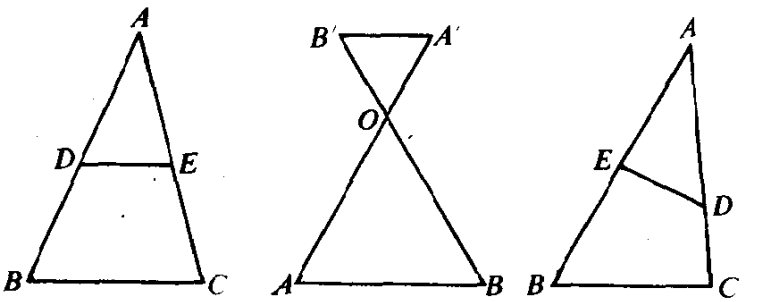
2. 已知：如图，

(1) $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，其中 $DE \parallel BC$；

(2) $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$，其中 $A'B' \parallel AB$；

(3) $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，其中 $\angle ADE = \angle B$.

写出各组相似三角形的对应边的比例式.



(1)　　(2)　　(3)

(第 2 题)

5.4 三角形相似的判定

根据相似三角形的定义可以判定两个三角形相似.能不能像判定三角形全等一样,除用定义外,还可用较少的几个条件就能判定三角形相似呢?

如图 5－19,$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$.我们看 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似.

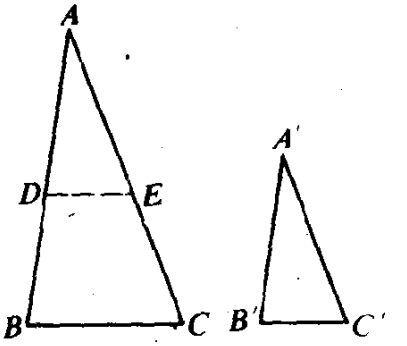


图 5－19

在 $\triangle ABC$ 的边 AB(或延长线)上,截取 $AD=A'B'$.过点 D 作 $DE\parallel BC$,交 AC 于点 E.则有

$$\triangle ADE\backsim\triangle ABC,$$

$\because\ \angle ADE=\angle B,\angle B=\angle B',$

$\therefore\ \angle ADE=\angle B'.$

又$\because\ \angle A=\angle A',\ AD=A'B',$

$\therefore\ \triangle ADE\cong\triangle A'B'C'.$

$\therefore\ \triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC.$

因此,有下面的定理:

判定定理 1　如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等,那么这两个三角形相似.可简单说成:**两角对应相等,两三角形相似.**

例 1　已知:$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,$\angle A=40°$,$\angle B=80°$,$\angle E=80°$,$\angle F=60°$.求证:$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

证明：∵ 在$\triangle ABC$中，$\angle A=40°$，$\angle B=80°$，

∴ $\angle C=180°-40°-80°=60°$.

∵ 在$\triangle DEF$中，$\angle E=80°$，$\angle F=60°$，

∴ $\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$（两角对应相等，两三角形相似）.

例2　直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形和原三角形相似.

已知：如图5－20，Rt$\triangle ABC$中，CD是斜边上的高.

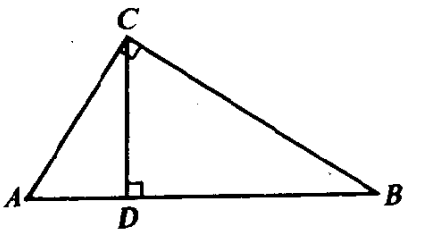


图　5－20

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle CBD\backsim\triangle ACD$.

证明：∵ $\angle B=\angle B$，$\angle CDB=\angle ACB=90°$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle CBD$（两角对应相等，两三角形相似）.

同理可证：$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle CBD\backsim\triangle ACD$.

练　习

1. 已知$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle B=\angle B'=75°$，$\angle C=50°$，$\angle A'=55°$，这两个三角形相似吗？为什么？

2. 已知一个三角形的两个角分别为70°和65°，你能画一个和这个三角形相似的三角形吗？

3. 已知等腰$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A$、$\angle A'$分别是顶角．证明：(1)如果$\angle A=\angle A'$，那么$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$；(2)如果$\angle B=\angle B'$(或$\angle C=\angle C'$)，那么$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．

判定定理2　如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似．可简单说成：**两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似．**

已知：如图5－21，$\triangle A'B'C'$和$\triangle ABC$中，$\angle A'=\angle A$，$A'B':AB=A'C':AC$．

求证：$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$．

证明：在$\triangle ABC$的边AB、AC(或它们的延长线)上分别截取$AD=A'B'$，$AE=A'C'$，连结DE．因$\angle A=\angle A'$，这样，$\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$．

$\because\quad \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}$，

$\therefore\quad \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$．

$\therefore\quad DE\parallel BC$．

$\therefore\quad \triangle ADE\backsim\triangle ABC$．

$\therefore\quad \triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$．

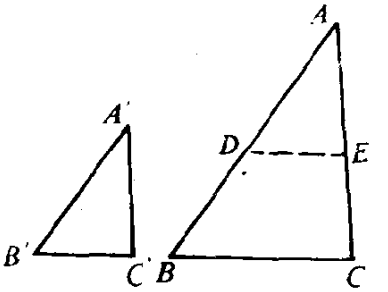


图　5－21

判定定理 3　如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

可简单说成：**三边对应成比例，两三角形相似.**

已知：如图 5－22，

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}.$$

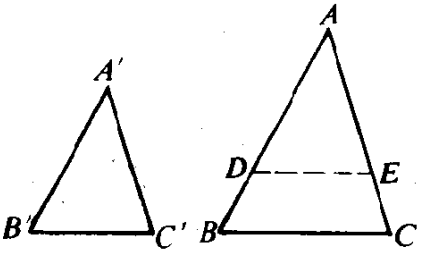


图　5－22

求证：$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

证明：在$\triangle ABC$的边 AB(或延长线)上截取 $AD=A'B'$，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E.这样，$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{EA}{CA}$，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$\because$　$AD=A'B'$，

$\therefore$　$\frac{AD}{AB}=\frac{A'B'}{AB}$.

又$\because$　$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}$，

$\therefore$　$\frac{DE}{BC}=\frac{B'C'}{BC}$，$\frac{EA}{CA}=\frac{C'A'}{CA}$.

因此，$DE=B'C'$，$EA=C'A'$.

$\therefore$　$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore$　$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

例 3　依据下列各组条件，判定$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是不是相似，并说明为什么：

(1) $\angle A=120°$, $AB=7$ 厘米, $AC=14$ 厘米,

$\angle A'=120°$, $A'B'=3$ 厘米, $A'C'=6$ 厘米;

(2) $AB=4$ 厘米, $BC=6$ 厘米, $AC=8$ 厘米, $A'B'=12$ 厘米, $B'C'=18$ 厘米, $A'C'=24$ 厘米.

解: (1) $\because \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{14}{6}=\dfrac{7}{3}$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又 $\because \angle A=\angle A'$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ (两边对应成比例且夹角相等,两三角形相似).

(2) $\because \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ (三边对应成比例,两三角形相似).

练 习

1. 依据下列各组条件, 判定$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是不是相似, 并说明为什么:

(1) $\angle A=45°$, $AB=12$ 厘米, $AC=15$ 厘米,

$\angle A'=45°$, $A'B'=16$ 厘米, $A'C'=20$ 厘米;

(2) $AB=12$ 厘米，$BC=15$ 厘米，$AC=24$ 厘米，

$A'B'=20$ 厘米，$B'C'=25$ 厘米，$A'C'=40$ 厘米.

2. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=47°$，$AB=1.5\text{cm}$，$AC=2\text{ cm}$，

$\triangle DEF$ 中，$\angle E=47°$，$ED=2.8\text{ cm}$，$EF=2.1\text{ cm}$.

这两个三角形相似吗？为什么？如果相似，写出表示式.

3. 要做两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形框架的三边的长分别为 4、5、6，另一个三角形框架的一边长为 2，怎样选料可使这两个三角形相似？你选的木料唯一吗？

我们知道，判定直角三角形全等除“*SAS*”、“*ASA*”、“*SSS*”方法外，还有“*HL*”方法.类似地，判定直角三角形相似除前面已讲的方法外，还有下面定理.

定理　如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

已知：如图 5－23，Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

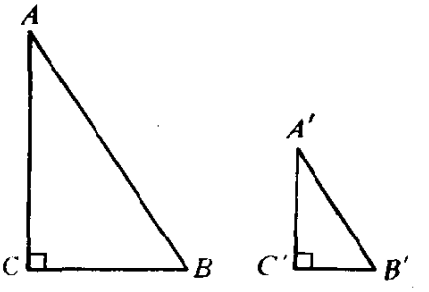


图　5－23

求证：Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.

证明：$\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，

$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$.

$\therefore \quad \frac{AB^2}{AC^2}=\frac{A'B'^2}{A'C'^2}$.

$\therefore \quad \frac{AB^2-AC^2}{AC^2}=\frac{A'B'^2-A'C'^2}{A'C'^2}$.

由勾股定理，得 $\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{B'C'^2}{A'C'^2}$.

$\because \quad \frac{BC}{AC}$、$\frac{B'C'}{A'C'}$ 都是正数，

$\therefore \quad \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$，即 $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

又$\because \quad \angle C=\angle C'=90°$，

$\therefore \quad \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$（两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似）.

例 4 已知：如图5－24，$\angle ABC=\angle CDB=90°$，$AC=a$，$BC=b$. 当 BD 与 a、b 之间满足怎样的关系式时，$\triangle ABC\backsim\triangle CDB$？

分析：因为$\triangle ABC$ 与$\triangle CDB$ 都是直角三角形，所以要使$\triangle ABC\backsim\triangle CDB$，只要使 AC 与 BC，BC 与 BD 分别成对应边，并且 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{BD}$ 即可. 这样就可求出 BD 与 a、b 之间的关系式.

解：∵ $\angle ABC=\angle CDB=90°$，

∴ 当 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{BD}$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle CDB$.

即 $\frac{a}{b}=\frac{b}{BD}$ 时，

$\triangle ABC\backsim\triangle CDB$.

∴ $BD=\frac{b^2}{a}$.

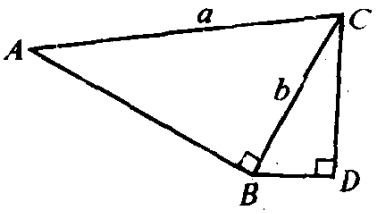


图 5-24

答：当 $BD=\frac{b^2}{a}$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle CDB$.

练 习

1. Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$. 依据下列各组条件判定这两个三角形是不是相似，并说明为什么：

(1) $\angle A=25°$，$\angle B'=65°$；

(2) $AC=3$，$BC=4$，$A'C'=6$，$B'C'=8$；

(3) $AB=10$，$AC=8$，$A'B'=15$，$B'C'=9$.

2. 已知：Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，CD、$C'D'$ 分别是两个三角形斜边上的高，且 $CD:C'D'=AC:A'C'$. 证明：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

想一想

已知$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$一定相似吗？

例5 已知$\triangle ABC$,P是边AB上的一点,连结CP.

(1)$\angle ACP$满足什么条件时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$;

(2)$AC:AP$满足什么条件时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$.

分析:从图5-25中可以看出,$\triangle ACP$与$\triangle ABC$中,$\angle A=\angle A$.根据三角形相似的判定定理,只要使$\angle ACP=\angle B$,或使$AC:AP=AB:AC$,都有$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$.

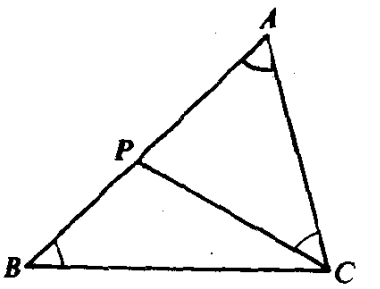


图 5-25

解:(1)∵ $\angle A=\angle A$,

∴ 当$\angle ACP=\angle B$时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$(两角对应相等,两三角形相似);

(2)∵ $\angle A=\angle A$,

∴ 当$AC:AP=AB:AC$时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$(两边对应成比例且夹角相等,两三角形相似).

答:(1)$\angle ACP=\angle B$时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$;

(2)$AC:AP=AB:AC$时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$.

例6 已知:如图5-26,$A'B'\parallel AB$,$B'C'\parallel BC$.求证:$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

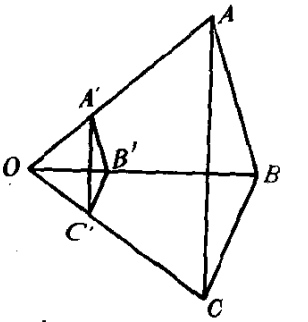


图 5-26

证明:∵ $A'B'\parallel AB$,

$$\therefore\ \frac{OB'}{OB}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}.$$

∵ $B'C'\parallel BC$,

$\therefore \quad \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

这样，$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OC'}{OC}$. 因此，$A'C'/\!/AC$.

$\therefore \quad \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{A'C'}{AC}$.

$\therefore \quad \dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

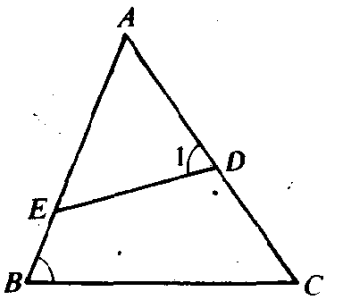
$\therefore$ $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$（三边对应成比例，两三角形相似）.

练　习

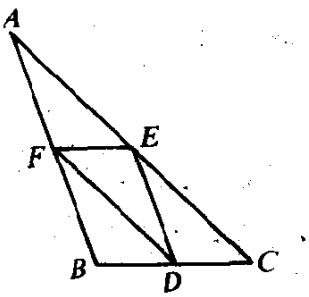
1. 如图，D、E 是 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 上的点.

(1) $\angle 1$ 与 $\angle B$ 有什么样的关系时，$\triangle AED \backsim \triangle ACB$；

(2) 已知：$AD \cdot AC = AE \cdot AB$. 求证：$\triangle AED \backsim \triangle ACB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 的中点. 求证：$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

3. 已知：P 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 上的点，且 $BP = 3PC$，Q 是 CD 的中点. 求证：$\triangle ADQ \backsim \triangle QCP$.

习 题 5.3

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)什么是相似三角形？

(2)“平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似”．你能根据三角形相似的定义，说明这两个三角形为什么相似吗？

(3)三角形相似有哪些判定定理？全等三角形一定相似吗？相似三角形一定全等吗？

(4)判定直角三角形相似的方法有几种？分别说出它们的内容．

2. 已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$．求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$．

3. 已知：$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=40°$，$\angle B=70°$，$\angle A'=40°$，$\angle C'=70°$．求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'C'B'$．

4. 已知：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$中，$\angle B=25°$，$\angle C=50°$，$\angle B'=105°$，$\angle C'=25°$．这两个三角形相似吗？

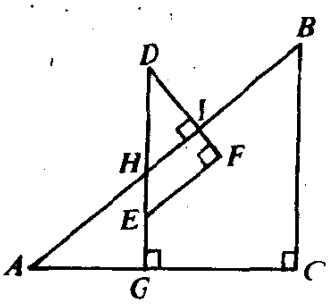
5. 已知：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$AB=a$，$AC=b$，$A'B'=a'$．当 $A'C'$为多少时(用 a、b、a'表示)，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$？

6. 已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB=a$, $BC=b$, $CA=c$, $A'B'=a'$, $B'C'=b'$, 且 $a:a'=b:b'$. 当 $C'A'$ 为多少时(用 a、a'、c 或 b、b'、c 表示), $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似?

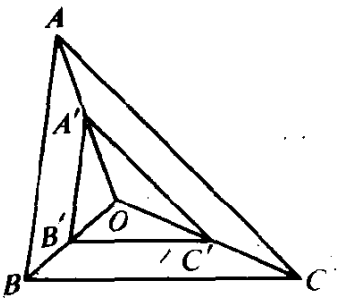
7. 作 $\triangle A'B'C'$, 使它与已知 $\triangle ABC$ 相似, 且与边 BC 相对应的边 $B'C'$ 等于已知线段 a'.

8. 已知: $\triangle ABC$. 求作: $\triangle A'B'C'$, 使它与 $\triangle ABC$ 相似, 并使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 2:3.

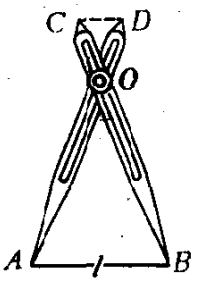
9. 如图, $\triangle ABC$ 中; $\angle C$ 为直角; $\triangle DEF$ 中 $\angle F$ 为直角, $DE \perp AC$, 交 AC 于 G, 交 AB 于 H, $DF \perp AB$, 交 AB 于 I, 求证: $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.



(第 9 题)



(第 10 题)

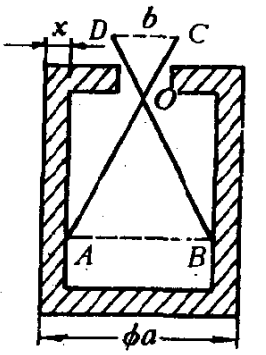


(第 11 题)

10. 已知: 如图, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. 求证: $\triangle OAC \backsim \triangle OA'C'$.

11. 比例规是一种画图工具(如图), 使用它可以把线段按一定比例伸长或缩短. 它是由长度相等的两脚 AD 和 BC 交叉构成的. 如果把比例规的两脚合上, 使螺丝钉固定在刻度 3 的地方(即同时使 $OA=3OD$, $OB=3OC$), 然后张开两脚, 使 A、B 两个尖端分别在线段 l 的两个端点上, 这时 $CD=\frac{1}{3}AB$, 为什么?

12. 已知如图所示的零件的外径为 a，要求它的厚度 x，需先求出内孔的直径 AB，但不能直接量出 AB. 现用一个交叉卡钳(两条尺长 AC 和 BD 相等)去量，若 $OA:OC=OB:OD=n$，且量得 $CD=b$，求厚度 x.

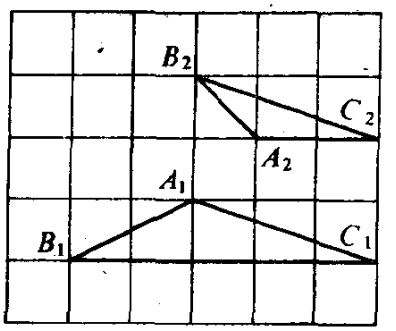


(第 12 题)

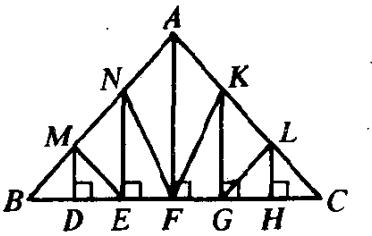
B 组

1. 求证：两个等腰三角形中，如果一腰和底对应成比例，那么这两个三角形相似.

2. 如图，在正方形网格上有两个三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$. 求证：$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，人字形屋架上的六段距离 BD、DE、EF、FG、GH、HC 彼此相等. MD、NE、AF、KG、LH 都垂直于 BC，中柱 $AF=2$ 米，求支柱 DM、EN 的长.

4. 已知：BE、CF 分别是 $\triangle ABC$ 的中线，且交点是 G. 求证：$GB:GE=GC:GF=2$.

5.5 相似三角形的性质

上一节我们学习了判定三角形相似的方法，相似三角形具有哪些性质呢？

根据三角形相似的定义可以知道，相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

下面我们研究相似三角形的其他性质.

定理　相似三角形对应高的比，对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

我们来证明相似三角形对应高的比等于相似比，其他两种情况可类似证明.

已知：如图 5－27，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比是 k，AD、$A'D'$ 是对应高.

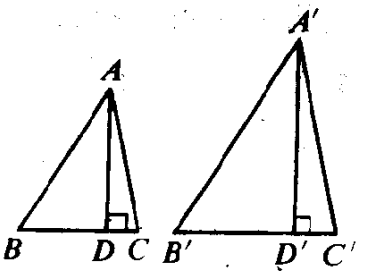


图　5－27

求证：$\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

证明：$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

$\therefore$ $\angle B=\angle B'$.

又 $\because$ $\angle ADB=\angle A'D'B'=90°$，

$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

练　习

1. 求证：相似三角形对应中线的比等于相似比.

2. 求证：相似三角形对应角平分线的比等于相似比.

3. 已知：四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle DAB$，$\angle ACD=\angle ABC$.
求证：$AC^2=AB\cdot AD$.

我们知道，如果 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 k，那么 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$. 利用等比性质可以得到：

$$\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$$

因此有下面的定理：

定理　相似三角形周长的比等于相似比.

例 1　已知：如图5－28，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的周长分别为 60 cm 和 72 cm，且 $AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm. 求：BC、AC、$A'B'$、$A'C'$.

解：$\because\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

$\therefore\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{60}{72}$（相似三角形周长的比等于相似比）.

把 $AB=15$ cm，$B'C'=24$ cm 代入上式，解得 $A'B'=18$ (cm)，$BC=20$ (cm).

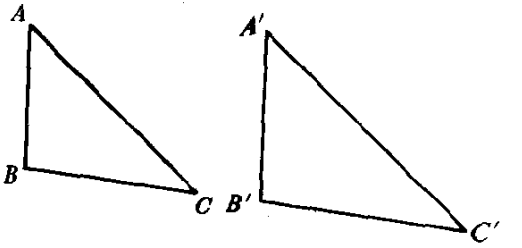


图　5－28

$\therefore$ $AC=60-15-20=25\ (\text{cm})$,

$A'C'=72-18-24=30\ (\text{cm})$.

我们知道，相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比以及周长的比都等于相似比. 相似三角形面积的比等于什么呢?

如图 5－29，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比是 k，AD、$A'D'$ 分别是高. 那么，

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}$$

$$=k\cdot k=k^2.$$

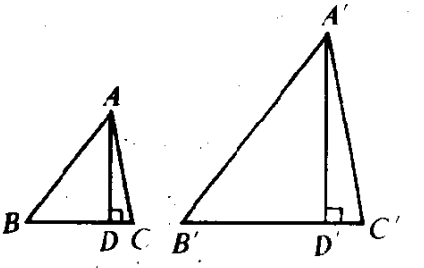


图 5－29

由此得到下面的定理:

定理　相似三角形面积的比等于相似比的平方.

注意　相似三角形面积的比不等于相似比，而等于相似比的平方.

例 2　有同一三角形地块的甲、乙两地图，比例尺分别为1 :200 和 1 :500 .求甲地图与乙地图的相似比和面积比.

解: $\because$ 甲、乙地图都与原实际三角形地块相似，

$\therefore$ 这两个地图相似.

设实际三角形地块的某边长为 a，那么甲地图的对应边长为 a :200，乙地图的对应边长为 a :500 .

∴ 这两个地图的相似比为:

$$\frac{a}{200}:\frac{a}{500}=\frac{5}{2}.$$

∴ 它们的面积比为 $\frac{25}{4}$ (相似三角形面积的比等于相似比的平方).

练 习

1. 把一个三角形变成和它相似的三角形.
   (1)如果边长扩大为原来的100倍,那么面积扩大为原来的多少倍?
   (2)如果面积扩大为原来的100倍,那么边长扩大为原来的多少倍?
2. 已知:点 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点.
   求证: $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle DEF}$.

例3 已知:如图5-30,AD、BE 是$\triangle ABC$ 的高,$A'D'$、$B'E'$是 $\triangle A'B'C'$的高,且 $\frac{AB}{AD}=\frac{A'B'}{A'D'}$,$\angle C=\angle C'$.

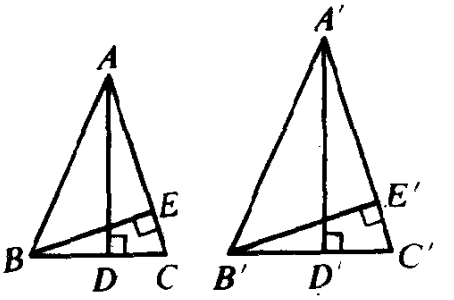


图 5-30

求证: $AD\cdot B'E'=A'D'\cdot BE$.

分析: $AD\cdot B'E'=A'D'\cdot BE$,就是

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}.$$

这样,只要证明$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,那么就可利用相似三角形对应高的比的性质.

证明: ∵ $\angle ADB=\angle A'D'B'=90°$,

$$\frac{AB}{AD}=\frac{A'B'}{A'D'},$$

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$.

∴ $\angle ABD=\angle A'B'D'$.

又∵ $\angle C=\angle C'$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{BE}{B'E'}$ (相似三角形对应高的比等于相似比).

∴ $AD\cdot B'E'=A'D'\cdot BE$.

例4 如图5-31, CD是Rt$\triangle ABC$的斜边上的高.

(1)已知$AD=9$ cm, $CD=6$ cm. 求BD;

(2)已知$AB=25$ cm, $BC=15$ cm. 求BD.

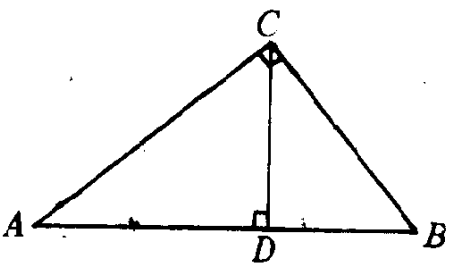


图 5-31

解: (1)∵ $\triangle ABC$为直角三角形,CD是斜边上的高,

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

∴ $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$.

即 $\dfrac{9}{6}=\dfrac{6}{BD}$.

$\therefore\quad BD=\dfrac{6\times 6}{9}=4\ (\text{cm})$.

(2)同(1)可得: $\triangle CBD\backsim\triangle ABC$, $\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{BD}{BC}$.

$\therefore\quad \dfrac{15}{25}=\dfrac{BD}{15}$.

$\therefore\quad BD=\dfrac{15\times 15}{25}=9\ (\text{cm})$.

练　习

1. 设 AD、BE 和 CF 是锐角$\triangle ABC$ 的三条高.

求证: $AD\cdot BC=BE\cdot CA=CF\cdot AB$(用比例线段证明).

2. 已知: AB 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边,CD 是高.

求证: (1) $CD^2=AD\cdot BD$;

(2) $BC^2=AB\cdot BD$.

例5　如图5－32, $\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料,边 BC = 120 毫米,高 AD = 80 毫米,要把它加工成正方形零件,使正方形的一边在 BC 上,其余两个顶点分别在 AB、AC 上. 这个正方形零件的边长是多少?

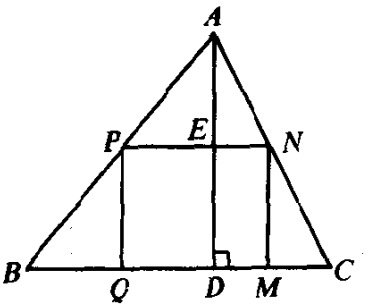


图　5－32

分析：假如 $PQMN$ 为加工成的正方形零件，那么 $AE \perp PN$. 这样 $\triangle APN$ 的高可写成 $AD-ED=AD-PN$. 再由 $\triangle APN \backsim \triangle ABC$，即可找到 PN 与已知条件的关系.

解：设正方形 $PQMN$ 为加工成的正方形零件. 边 QM 在 BC 上，顶点 P、N 分别在 AB、AC 上. $\triangle ABC$ 的高 AD 与边 PN 相交于点 E. 设正方形的边长为 x 毫米.

$\because$ $PN \parallel BC$，

$\therefore$ $\triangle APN \backsim \triangle ABC$.

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{PN}{BC}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

因此，$\dfrac{80-x}{80}=\dfrac{x}{120}$.

解得 $x=48$（毫米）.

答：加工成的正方形零件的边长为 48 毫米.

练　习

当把例 5 中的三角形余料，加工成矩形，且 $PN=2PQ$ 时，PN 是多少？

习 题 5.4

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1) 相似三角形的对应角相等吗？对应边成比例吗？

(2) 什么是相似三角形的相似比？相似三角形的对应高的比，对应中线的比和对应角平分线的比与相似比之间有什么关系？

(3) 相似三角形周长的比等于相似比吗？相似三角形面积的比等于相似比吗？

2. 如图，铁道口的栏杆的短臂长 1.25 米，长臂长 16.5 米，当短臂端点下降 0.85 米时，长臂端点升高多少（杆的宽度忽略不计）？

(第 2 题)

3. $\triangle ABC$ 中，$BC=52$ 厘米，$CA=46$ 厘米，$AB=63$ 厘米．另一个和它相似的三角形的最短边为 12 厘米．求其余两边的长度．

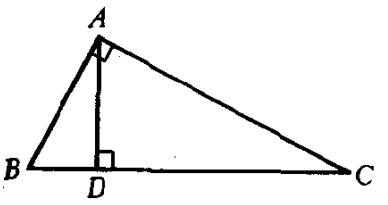
4. $\triangle ABC$ 中，$AB=12$ 厘米，$BC=18$ 厘米，$CA=24$ 厘米．另一个和它相似的 $\triangle A'B'C'$ 的周长为 81 厘米．求 $\triangle A'B'C'$ 的各边长．

5. 两个相似三角形的一对对应边长分别是 35 cm 和 14 cm .

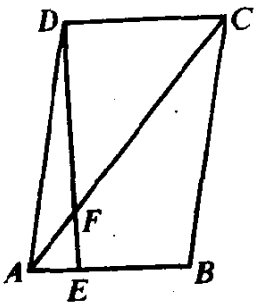
(1) 它们的周长相差 60 cm，求这两个三角形的周长;

(2) 它们的面积相差 588 cm^2，求这两个三角形的面积.

6. 如图，AD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的高. 设 $AC=60$，$AB=45$. 求 AD、BD、CD .



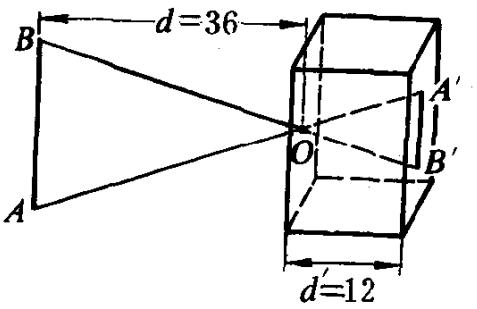
(第 6 题)



(第 7 题)

7. 已知: 如图，$\square ABCD$ 中，$AE:EB=1:2$. 求: $\triangle AEF$ 与$\triangle CDF$ 的周长的比; 如果$S_{\triangle AEF}=6\ cm^2$，求 $S_{\triangle CDF}$.

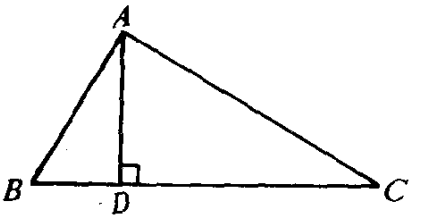
8. (针孔成像问题)根据图中尺寸($AB\ //\ A'B'$)，可以知道物像 $A'B'$ 的长是物 AB 的长的 $\frac{1}{3}$.你能说出其中的道理吗?



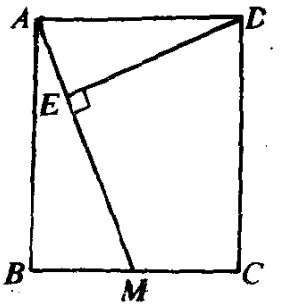
(第 8 题)

B 组

1. 已知：如图，$AD \perp BC$，垂足为 D，且 AD 是 BD、DC 的比例中项. 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.



(第 1 题)

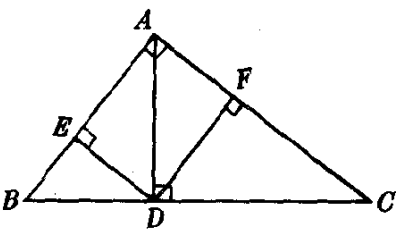


(第 2 题)

2. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，M 是 BC 的中点，$DE \perp AM$，E 是垂足. 求证：$DE=\dfrac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

3. 已知：如图，$\angle BAC=90°$，$AD \perp BC$、$DE \perp AB$、$DF \perp AC$，垂足分别为 D、E、F.

求证：$\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}$.（提示：$\left(\dfrac{AB^2}{AC^2}\right)^2=\left(\dfrac{BD}{CD}\right)^2$.）



(第 3 题)

5.6 相似多边形

前面，我们研究了相似三角形，现在来研究相似多边形.

如果两个边数相同的多边形的对应角相等，对应边成比例，这两个多边形叫做**相似多边形**. 相似多边形的对应边的比叫做**相似比**(或**相似系数**).

例如，图 5－33 中，$\angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$,$\angle D=\angle D'$,$\angle E=\angle E'$;

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}=\frac{2}{3}.$$

因此，五边形 $ABCDE\backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$,且五边形 $ABCDE$ 与 $A'B'C'D'E'$ 的相似比 $k_1=\frac{2}{3}$，而五边形 $A'B'C'D'E'$ 与 $ABCDE$ 的相似比 $k_2=\frac{3}{2}$.

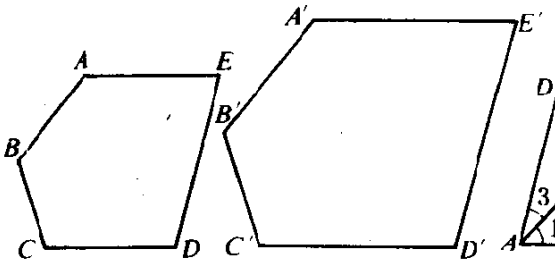


图 5－33

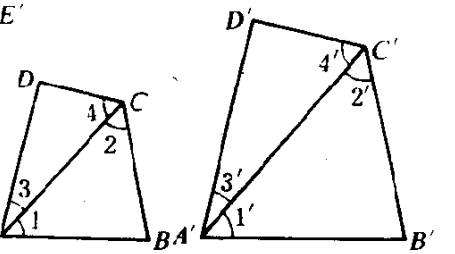


图 5－34

例 1 已知:如图5－34,四边形 $ABCD$ 及四边形 $A'B'C'D'$ 中,$\angle 1=\angle 1'$,$\angle 3=\angle 3'$,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{AD}{A'D'}$.

求证：四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $A'B'C'D'$.

证明：∵ $\angle 1=\angle 1'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，

∴ $\triangle ABC$ ∽ $\triangle A'B'C'$.

∴ $\angle 2=\angle 2'$，$\angle B=\angle B'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

又∵ $\angle 3=\angle 3'$，$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，

∴ $\triangle ACD$ ∽ $\triangle A'C'D'$.

∴ $\angle 4=\angle 4'$，$\angle D=\angle D'$，$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{DC}{D'C'}$.

∴ $\angle DAB=\angle D'A'B'$，$\angle DCB=\angle D'C'B'$，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}.$$

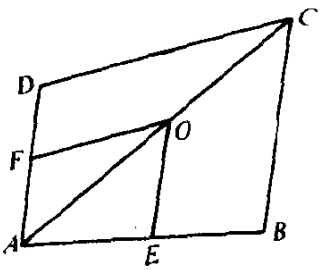
∴ 四边形 $ABCD$ ∽ 四边形 $A'B'C'D'$.

练　习

1. 一个四边形与一个五边形能相似吗？

2. 两个四边形对应边成比例，三对角对应相等，这两个四边形相似吗？为什么？

3. 如图，设 O 是四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一点，$OF \parallel CD$，$OE \parallel CB$. 求证：四边形 $AEOF$ ∽ 四边形 $ABCD$



（第3题）

根据相似多边形的定义，可知相似多边形的对应角相等、对应边成比例.

相似多边形还有哪些性质呢？

像相似三角形一样，利用等比性质可得到：

定理　相似多边形周长的比等于相似比.

下面我们以相似六边形为例来说明相似多边形的其他性质.

如图 5－35 中，AC、AD、AE 与 $A'C'$、$A'D'$、$A'E'$ 是相似六边形 $ABCDEF$ 和 $A'B'C'D'E'F'$ 的对应对角线.

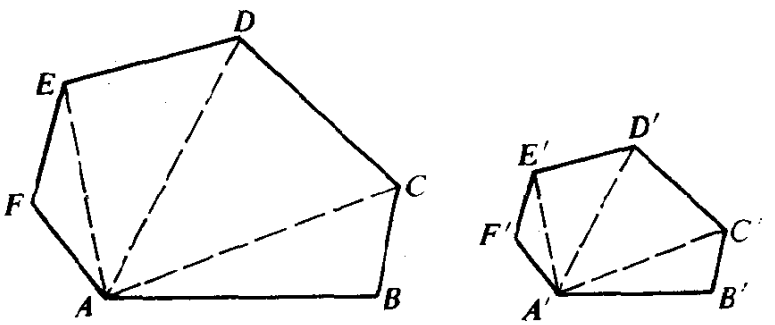


图　5－35

设相似六边形 $ABCDEF$ 与 $A'B'C'D'E'F'$ 的相似比为 k，我们来看看对应对角线的比与相似比的关系.

∵　六边形 $ABCDEF \backsim$ 六边形 $A'B'C'D'E'F'$，

∴　$\angle B=\angle B'$，　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k$.

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

∴　$\dfrac{AC}{A'C'}=k$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

由此又可得$\angle ACD=\angle A'C'D'$，

$$\frac{AC}{A'C'}=\frac{DC}{D'C'}=k.$$

$\therefore\ \triangle ACD\backsim\triangle A'C'D'$.

$\therefore\ \dfrac{AD}{A'D'}=k$.

同理可得 $\dfrac{AE}{A'E'}=k$.

一般地，可以得到：

两个相似多边形对应对角线的比等于相似比.

例 2 已知四边形$ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$，它们的周长分别为 92 cm 和 46 cm，且$AB=10$ cm，$BD=40$ cm. 求：$A'B'$，$B'D'$的长.

解： $\because$ 四边形$ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$，

$\therefore\ \dfrac{92}{46}=\dfrac{10}{A'B'}$（相似多边形周长的比等于相似比），$\dfrac{92}{46}=\dfrac{40}{B'D'}$（两个相似多边形对应对角线的比等于相似比）.

解得，$A'B'=5$ (cm)，$B'D'=20$ (cm).

练　习

1. 以五边形为例证明：相似多边形周长的比等于相似比.
2. 已知四边形$ABCD\backsim$四边形$A'B'C'D'$，且$AB=10$，$BC=7$，$CD=20$，$B'C'=14$，$D'A'=16$，$A'C'=30$. 求DA，AC，$A'B'$，$C'D'$的长.

以两个相似多边形的对应顶点为顶点的两个三角形(相似多边形中的对应三角形),它们的边或是多边形的边,或是多边形的对应对角线,所以这样的两个三角形的三边对应成比例,它们是相似三角形.例如图 5－35 中的 $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$. 于是有

定理　相似多边形中的对应三角形相似，相似比等于相似多边形的相似比.

根据这个性质和相似三角形面积的比等于相似比的平方及等比性质,我们还可得到:

定理　相似多边形面积的比等于相似比的平方.

例 3　如图 5－36，四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$,它们的对角线分别交于点 O、O'. 求证: $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$.

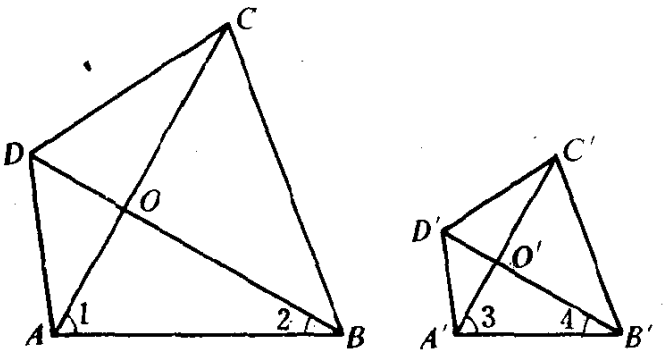


图　5－36

证明: ∵　四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$,

∴　$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$,

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$（相似多边形中的对应三角形相似）.

$\therefore\ \angle 2 = \angle 4, \angle 1 = \angle 3$.

$\therefore\ \triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$.

练　习

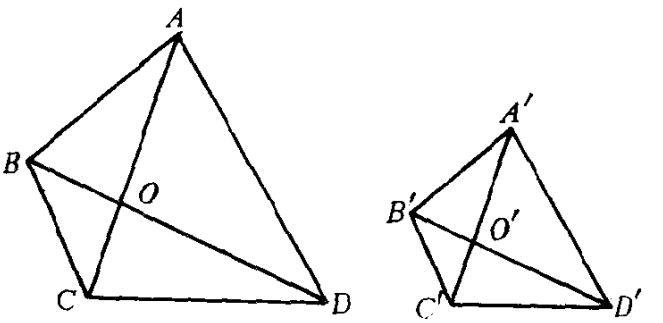
1. 以五边形为例证明：

   相似多边形面积的比等于相似比的平方.

2. 已知：四边形$ABCD \backsim$四边形$A'B'C'D'$，它们的周长分别为90和72.

   求：$\dfrac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}$的值.

3. 如图中，如果$\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$，$\triangle OBC \backsim \triangle O'B'C'$，$\triangle OCD \backsim \triangle O'C'D'$，$\triangle ODA \backsim \triangle O'D'A'$，那么四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$相似吗？



（第3题）

习 题 5.5

A 组

1. 阅读课文，思考下列问题：

(1)什么是相似多边形？

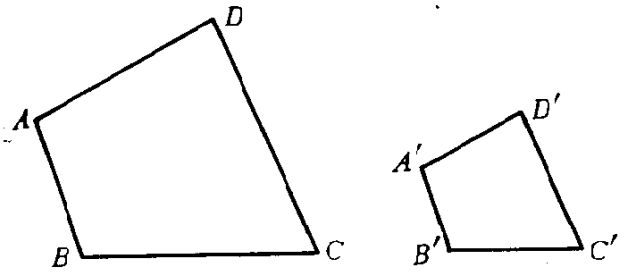
(2)相似多边形有哪些性质？

2. 所有的矩形都相似吗？所有的菱形都相似吗？所有的正方形呢？

3. 在下表的空白处填入合适的数.

两个多边形的相似比	10					$\frac{1}{100}$
它们的周长的比			5	$\frac{1}{8}$		
它们的面积的比		4			$\frac{1}{3}$	

4. 在四边形 $ABCD$ 及 $A'B'C'D'$ 中，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$. 求证：这两个四边形相似.

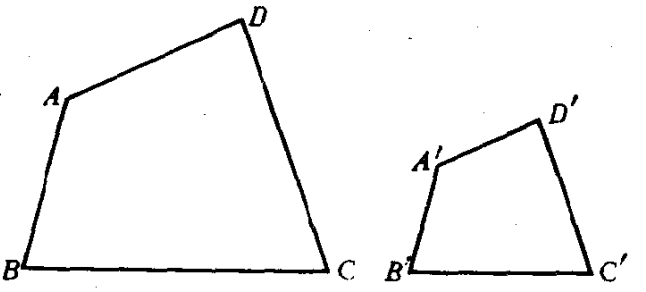


(第4题)

5. 已知：四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}.$$

求证：四边形 $ABCD\backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$.



（第 5 题）

6. 在一张比例尺为 1∶50000 的地图上，一块多边形地区的周长是 72cm，面积是 320cm^2. 这个地区的实际周长是多少？面积是多少？

B 组

1. 已知五边形 $ABCDE$，分别在边 AB、AE 和对角线 AC、AD 的延长线上取点 B'、E'、C'、D'，使五边形 $A'B'C'D'E'\backsim$ 五边形 $ABCDE$，并且周长是原来五边形周长的 3 倍.
2. 已知五边形 $ABCDE\backsim$ 五边形 $A'B'C'D'E'$，O、O' 分别是这两个五边形内的一点，并且 $\triangle OAB\backsim\triangle O'A'B'$.

求证：$\triangle OBC\backsim\triangle O'B'C'$；$\triangle OCD\backsim\triangle O'C'D'$；

$\triangle ODE\backsim\triangle O'D'E'$；$\triangle OEA\backsim\triangle O'E'A'$.

读一读

位似变换

在生活中，有时需要把某个图形放大或缩小，如把一张图纸放大或缩小．放大或缩小后的图形与原图形的形状相同(相似)．下面我们介绍一种特殊的放大缩小方法．

例如，把图 1 中的多边形 $ABCDE$ 放大 2 倍(即新图与原图的相似比为 2)．

如图，1. 任取一个点 O．

2. 以点 O 为端点作射线 OA、OB、OC、…．

3. 分别在射线 OA、OB、OC、… 上取点 A'、B'、C'、…，使 $OA':OA=OB':OB=OC':OC=\cdots=2$．

4. 连结 $A'B'$、$B'C'$、…，得多边形 $A'B'C'D'E'$．

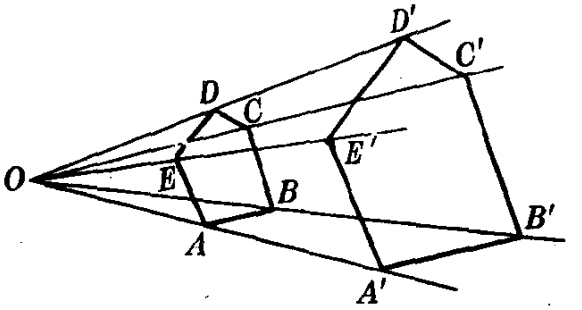


图 1

容易证明这两个多边形相似，并且新图形与原图形的相似比为 2.

我们知道，按一定的方法把一个图形变成另一个图形叫做几何变换．图 1 中大多边形是由小多边形按上述方法变得的，

所以这也是一个几何变换. 这种变换与前面提过的全等变换不同,它只保持图形的形状不变,这种几何变换叫做相似变换.

图 1 中的两个多边形不仅相似,而且对应顶点的连线相交于一点,像这样的相似变换叫做位似变换.

在图 2 中,任取一个点 O,不作射线 OA、OB、OC、…,而作直线 OA、OB、OC、…,在点 O 的另一侧取点 A'、B'、C'、…,使 $OA':OA=OB':OB=OC':OC=\cdots=2$,也可以得到放大 2 倍的多边形.

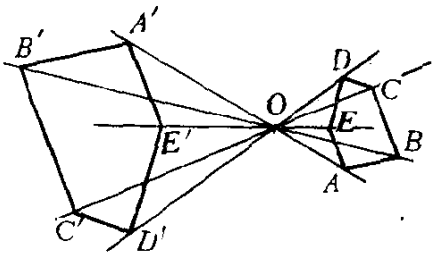


图 2

实际上,若把点 O 取在多边形内,或取在一条边上,或取在某一顶点上,也可以把一个多边形放大或缩小,而且更简便(图 3、图 4、图 5).

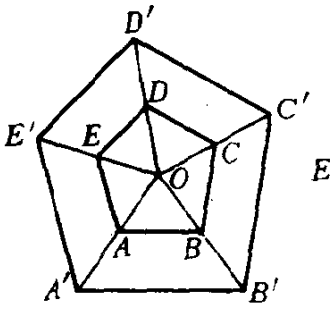


图 3

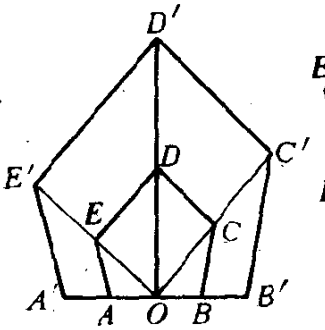


图 4

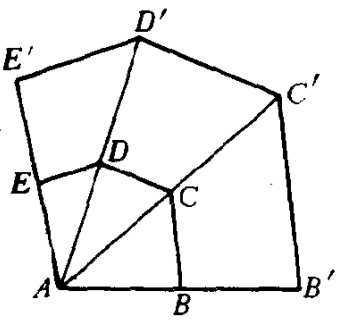


图 5

试一试,用这里介绍的位似变换方法把一个图形缩为原图形的一半(相似比为 1 :2).

小结与复习

一、内容提要

1. 本章主要学了比例线段和相似三角形. 具体内容有：比例线段及其性质，平行线分线段成比例定理,相似三角形,相似三角形的判定与性质，相似多边形及其性质等.

2. 平行线分线段成比例定理是研究相似形的基础.根据这个定理可以得到：平行于三角形一边的直线和其他两边相交,所截得的三角形与原三角形相似.

3. 判定两个三角形相似的方法与判定两个三角形全等的方法相类似.

判定三角形相似的方法有：

(1)三角形相似的定义;

(2)两角对应相等，两三角形相似;

(3)两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似;

(4)三边对应成比例，两三角形相似.

判定直角三角形相似除可用上面的方法外，还有下面的方法.

(5)斜边与一条直角边对应成比例，两直角三角形相似.

相似三角形具有下面的性质：

相似三角形的对应高、对应中线、对应角平分线及周长的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

4. 相似多边形对应对角线的比和周长的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方，以相似多边形三个对应顶点为顶点的对应三角形相似.

二、学习要求

1. 理解线段的比、成比例线段的概念. 会判断线段是不是成比例. 了解黄金分割的概念.

2. 会用平行线分线段成比例定理证明线段成比例及进行有关的计算，会分线段成已知比.

3. 能够灵活地运用两个角对应相等、或两边对应成比例且夹角相等、或三边对应成比例来判定两个三角形相似；能够熟练地运用一条直角边和斜边对应成比例来判定两个直角三角形相似.

4. 理解相似比的概念和相似三角形的对应高的比等于相似比、面积的比等于相似比的平方等性质.

5. 会按已知相似比作一个三角形与已知三角形相似.

6. 了解相似多边形的概念和相似多边形的对应对角线的比等于相似比、对应的三角形相似、周长的比等于相似比、面积的比等于相似比的平方等性质.

三、需要注意的几个问题

1. 在求两条线段的比时，一定要化成同一单位后，再求它们的比.

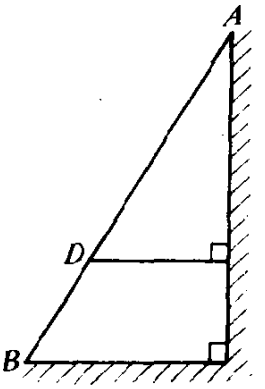
2. 线段 a、b、c、d 成比例，是有顺序的，表示 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 例如，已知 a、c、b、d 成比例，表示 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

3. 全等三角形是相似比为 1 的特殊的相似三角形. 两个三角形相似的判定与性质与三角形全等的判定与性质相类似，后者是前者的特例. 判定两个三角形相似和研究相似三角形时，同样要注意角、边的对应关系.

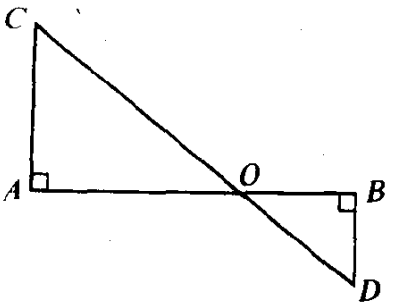
复习题五

A 组

1. 如图，AB 是斜靠在墙壁上的长梯. 梯脚 B 距墙 80 cm，梯上点 D 距墙 70 cm，BD 长 55 cm . 求梯子的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

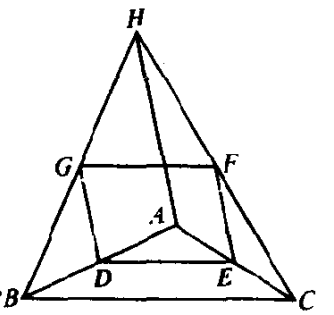
2. 已知：如图，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，$AO = 78$ cm，$BO = 42$ cm，$CD = 159$ cm . 求 CO 和 DO .

3. 已知：B、C 是 $\angle A$ 的一边上的两点；D、E 是 $\angle A$ 的另一边上的两点，且 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. 求证：$\angle ABD = \angle AEC$.

4. 已知：$\square ABCD$，E 是 AD 延长线上的一点，$DE = n \cdot AD$，EB 和 DC 相交于点 F. 求 $DF : DC$，$FC : DC$.

5. 已知：如图，$DE \parallel BC$，四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

   求证：$AH \parallel DG$.



（第 5 题）

6. AD、$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线，且 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BD}{B'D'} = \dfrac{AD}{A'D'}$.

   求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

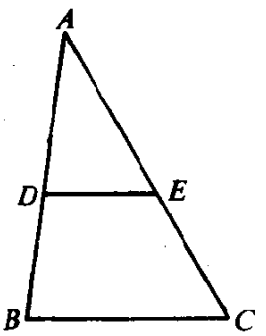
7. 求证：如果一个直角三角形的一条直角边和斜边上的高与另一个直角三角形的一条直角边和斜边上的高成比例，那么这两个直角三角形相似.

8. 求证：(1)如果一个菱形的一个角等于另一个菱形的一个角，那么这两个菱形相似；

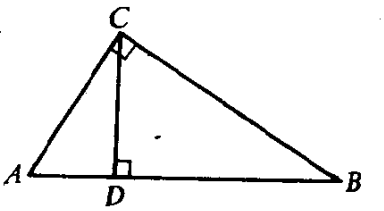
(2)如果一个矩形的两条邻边的比等于另一个矩形的两条邻边的比，那么这两个矩形相似.

9. 梯形 $ABCD$ 的高是 h，上底 CD 的长是 a，下底 AB 的长是 b，两腰的延长线相交于点 O. 求 $\triangle OAB$ 的 AB 边上的高.

10. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，且 $S_{\triangle ADE} : S_{四边形 BCED} = 1 : 2$. 求 $AD : DB$.



(第10题)



(第11题)

11. CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高. 设 $BC=a$、$CA=b$、$AB=c$、$CD=h$、$AD=q$、$DB=p$.

(1)已知：$c=29$，$p=4$，求 h 和 b；

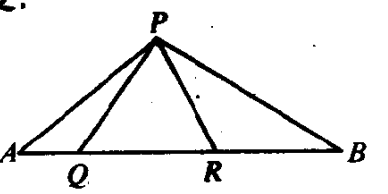
(2)已知：$a=5$，$h=4$，求 p 和 q；

(3)已知：$a=10$，$p=6$，求 q 和 b；

(4)已知：$p=4$，$h=10$，求 a 和 b.

12. 证明：从角的一条边上的点向另一边所作的垂线段的长与该点到角的顶点的距离的比不变.

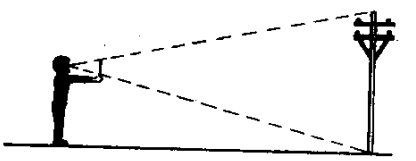
13. 已知：如图，$\triangle PQR$ 是等边三角形，$\angle APB=120°$. 求证：
(1) $\triangle PAQ\backsim\triangle BPR$;
(2) $AQ\cdot RB=QR^2$.



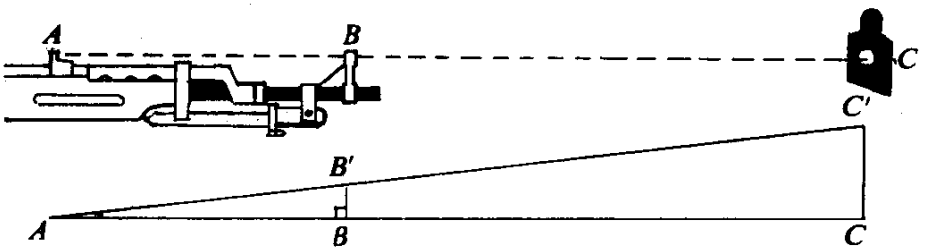
(第13题)

14. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，AD 的中点为 M，CM 的延长线交 AB 于点 K. 求证：$AB=3AK$.

15. 如图，一人拿着一支刻有厘米分划的小尺，他站在距电线杆约 30 米的地方，把手臂向前伸直，小尺竖直，看到尺上约 12 个分划恰好遮住电线杆，已知臂长约 60 厘米. 求电线杆的高.


(第15题)

16. 射击瞄准时，要求枪的标尺缺口上沿中央 A、准星尖 B 和瞄准点 C 在一条直线上(上图)，这样才能命中目标. 已知某种冲锋枪基线 AB 长 38.5 cm (下图)，如果射击距离 $AC=100$m，当准星尖在缺口内偏差 BB' 为 1 mm时，弹着偏差 CC' 是多少($BB'\parallel CC'$)?



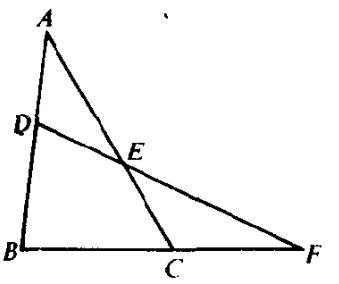
(第16题)

17. 一条河的两岸有一段是平行的，在河的这一岸每隔5米有一棵树，在河的对岸每隔50米有一根电线杆．在这岸离开岸边25米处看对岸，看到对岸相邻的两根电线杆恰好被这岸的两棵树遮住，并且在这两棵树之间还有三棵树．求河宽．

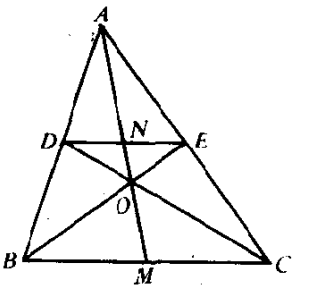
18. 在$\triangle ABC(AB>AC)$的边AB上取一点D，在边AC上取一点E，使$AD=AE$，直线DE和BC的延长线交于点P．求证：$BP:CP=BD:CE$．(提示：经过点C作AB的平行线．)

19. 过$\triangle ABC$的顶点C任作一直线，与边AB及中线AD分别交于点F和E．求证：$AE:ED=2AF:FB$．
(提示：过点D作$DM\parallel CF$交BF于点M．)

20. 如图，$BD=CE$．求证：$AC\cdot EF=AB\cdot DF$．(提示：过点D作$DG\parallel AC$，交BC于G．)



(第20题)



(第22题)

21. Rt$\triangle ABC$中有正方形$DEFG$，点D、G分别在AB、AC上，EF在斜边BC上．求证：$EF^2=BE\cdot FC$．

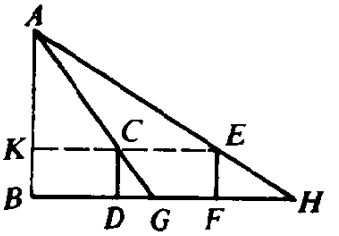
22. 已知：如图，$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，BE与CD交于点O，AO与DE、BC分别交于点N、M．求证：$\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{ON}{OM}$．

（提示：证明 $\frac{AN}{AM}=\frac{DE}{BC}=\frac{ON}{OM}$.）

B 组

1[1]. 为了求出海岛上的山峰 AB 的高度，在 D 和 F 处树立标杆 DC 和 FE，标杆的高都是 3 丈，相隔 1000 步（1 步等于 5 尺），并且 AB、CD 和 EF 在同一平面内，从标杆 DC 退后 123 步的 G 处，可看到山峰 A 和标杆顶端 C 在一直线上；从标杆 FE 退后127 步的 H 处，可看到山峰 A 和标杆顶端 E 在一直线上．求山峰的高度 AB 及它和标杆 CD 的水平距离 BD 各是多少？

（提示：连结 EC 并延长交 AB 于点 K，用 AK 表示 KC 及 KE．）



（第 1 题）

[1] 本题是我国魏晋时数学家刘徽所著《海岛算经》中九个代表性数学问题的第一题．原文是："今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，今后表与前表参相直，从前表却行一百二十三步，人目着地取望岛峰与表末参合，从后表却行一百二十七步，人目着地取望岛峰亦与表末参合．问岛高及去表各几何．"

自我测验五

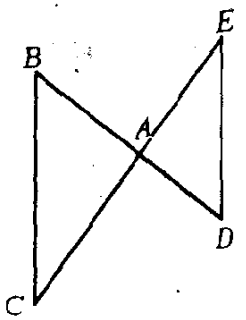
（满分 100 分，时间 45 分）

1.（每空 3 分，共 36 分）填空：

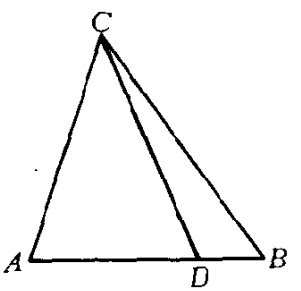
（1）如果线段 $a=3, b=4, c=5$，那么 b、a、c 的第四比例项 $d=$ _____；

（2）如果线段 $a=2$，且 a、b 的比例中项为 $\sqrt{10}$，那么线段 $b=$ _____；

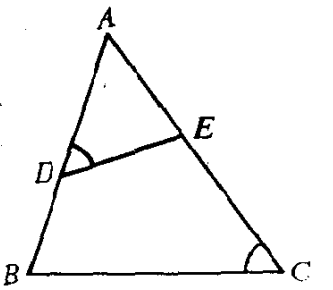
（3）如图，如果 $DE \parallel BC$，那么 $\triangle ADE \backsim$ _____；



（第 1(3)题）



（第 1(4)题）



（第 1(5)题）

（4）如图，如果 $AC^2=AD \cdot AB$，那么 $\triangle ABC \backsim$ _____；

（5）如图，如果 $\angle ADE=\angle C$，那么 $AD \cdot AB=$ _____；

（6）如果两个相似三角形对应高的比为 4 : 5，那么这两个相似三角形的相似比为_____，对应中线的比为_____，对应角平分线的比为_____；

（7）如果两个相似多边形的相似比为 2 : 3，且周长的和为 50 cm，那么这两个相似多边形的周长分别为 _____ 和 _____；

（8）如果两个相似多边形对应对角线的比为 5 : 9，那么它们的相似比为_____，面积的比为_____.

2. (每题 3 分，共 24 分)判断题:

(1)所有的等腰三角形都相似; (　　)

(2)有一对锐角相等的两个直角三角形相似; (　　)

(3)全等的三角形一定相似; (　　)

(4)所有的等边三角形都相似; (　　)

(5)所有的矩形都相似; (　　)

(6)所有的菱形都相似; (　　)

(7)所有的正方形都相似; (　　)

(8)边数不同的多边形一定不相似. (　　)

3. (每题 5 分，共 10 分)选择题:

(1)Rt$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，该图中共有 x 个三角形与$\triangle ABC$ 相似，x 的值为(　　)

(A)1.　　(B)2.

(C)3.　　(D)4.

(2)下列四组三角形中，两个三角形相似的为(　　)

(A)$\triangle ABC$ 中，$\angle A=35°$，$\angle B=50°$，

$\triangle A'B'C'$中，$\angle A'=35°$，$\angle C'=105°$.

(B)$\triangle ABC$ 中，$AB=1.5$，$BC=1.25$，$\angle B=38°$，

$\triangle A'B'C'$中，$A'B'=2$，$B'C'=1.5$，$\angle B'=38°$.

(C)$\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$BC=15$，$CA=26$，

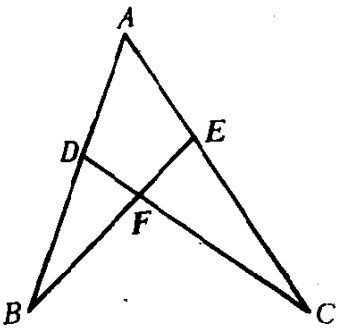
$\triangle A'B'C'$中，$A'B'=20$，$B'C'=25$，$C'A'=40$.

(D)Rt$\triangle ABC$ 中，斜边 $AB=5$，直角边 $BC=3$，

Rt$\triangle A'B'C'$中，斜边 $A'B'=15$，直角边 $A'C'=12$.

4. (15分)已知$\triangle ABC$. 作$\triangle A'B'C'$, 使它与$\triangle ABC$相似, 且$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为2.
(写出已知、求作、作法并保留作图痕迹)

5. (15分)已知: 如图, $AD \cdot AB = AE \cdot AC$.
求证: $\triangle FDB \backsim \triangle FEC$.



(第5题)

封面设计　陈圣西
图片摄影　路　遥

1998

ISBN 7-107-01925-2
9 787107 019258 >

ISBN 7－107－01925－2
G・3603(课)　定价:4.90元